Algebra és számelmélet gyakorlat
2023/2024 I. félév

2023. Szeptember 22.

1. Vektorok, Mátrixok

1.1. Definíció (Vektor). *Legyen $T = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Q}$. A T fölötti n magas oszlopvektor az*

$$y = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

alakú táblázatok, ahol $a_1, \ldots, a_n \in T$. Az összes ilyen oszlopvektorból álló halmaz jele T^n. Az n szám a T^n dimenziója. A sík, azaz $\mathbb{R}^2$ kétdimenziós.

Értelmezzük T^n -en az összeadást és a $\lambda \in T$ skalárral való szorzást.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

és

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Nullvektor: } 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ és az ellentett: } - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és $\lambda, \mu \in T$ skalárokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$, az összeadás asszociatív

(2) $u + v = v + u$, az összeadás kommutatív

(3) $u + 0 = 0 + u = u$, nullvektor: 0

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$, $-u$ az u ellentetje

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$

(8) $1 \cdot u = u$, ahol 1 a T egységeleme

Egy $n \times m$-es mátrix egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melyben T elemei vannak. Ezek halmazát $T^{n\times m}$ jelöli. Így T^n elemei $n \times 1$-es mátrixok. A sorvektorok az $1 \times m$-es mátrixok.

1.2. Definíció (Mátrix). *Legyen $T = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Q}$ Egy $m \times n$-es mátrix egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melyben T elemei vannak. Ezek halmazát $T^{n\times m}$ jelöli. Így T^n elemei $n \times 1$-es mátrixok. A sorvektorok az $1 \times m$-es mátrixok.*

Két mátrixot akkor lehet összeadni, ha ugyanaz a méretük. Skalárszoros:

$\lambda \cdot A$:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Összeadás: $A + B$, ha $(n \times k) + (n \times k) = (n \times k)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságai: asszociatív, kommutatív.

Szorzás: $A \cdot B$, ha $(n \times k) + (k \times m) = (n \times m)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 33 \\ 7 & 29 & 22 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságai: asszociatív, nem kommutatív!

1.3. Definíció (Kvadratikus mátrix). *$n \times n$. Négyzetes mátrix vagyis ugyanannyi sora van, mint oszlopa. Pl.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4. Definíció (Diagonális mátrix). *Olyan négyzetes(kvadratikus) mátrix, aminek a főátlóján kívüli elemek nullák. Pl.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5. Definíció (Egység mátrix). *Olyan mátrix, amely bármely A mátrixra: $A \cdot I = A$. Az egységmátrixok olyan diagonális mátrixok, aminek minden főátló eleme* 1.

$$I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vagy

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vagy

$$I_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1.6. Definíció (Inverz mátrix). *Jele A^{-1}, olyan mátrix, amire $A \cdot A^{-1} = I$ jobbinvez, illetve $A^{-1} \cdot A = 1$ bal inverz.*

1.7. Definíció (Transponált mátrix). *A mátrix sorainak és oszlopainak a felcserélése, jele: A^T vagy A^**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

vagy

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^* = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Végezzük el az alábbi szorzásokat:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Szorozzuk össze az alábbi mátrixokat!

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Az AB, BA, BC, $CB - C$ műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

4. Végezzük el a következő hatványozásokat:

   a.) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$

   c.) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$

   d.) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

5. Számítsuk ki az $AB - BA$ különbséget, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.web.elte.hu