Algebra és számelmélet gyakorlat
2023/2024 I. félév

2023. November 30.

1. Emlékeztető

1.1. Tétel (Polinomok azonossági tétele). *Ha egy R nullosztómentes gyűrű fölött adott két, legfeljebb n-edfokú polinom, amelyek több, mint n (R-beli) helyen megegyeznek, akkor a két polinom egyenlő.*

1.2. Tétel (K 2.5.8). *Ha az R kommutatív, egységelemes gyűrű fölötti f polimomra*

$$f(x) = (x - b_1)(x - b_2)\cdots(x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \cdots + (-1)^n \sigma_n$$

akkor a Viéte-formulák, azaz a gyökök és együtthatók közötti összefüggések a következők:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n \qquad \text{tagok száma: } \binom{n}{1} = n \\
\sigma_2 &= b_1b_2 + \cdots + b_1b_n + b_2b_3 + \cdots + b_{n-1}b_n \qquad \text{tagok száma: } \binom{n}{2} \\
\sigma_k &= b_1b_2\dots b_k + \dots \qquad \text{tagok száma: } \binom{n}{k} \\
\sigma_k &= b_1b_2\dots b_n \qquad \text{tagok száma: } \binom{n}{n} = 1
\end{aligned}$$

A σ_k úgy keletkezik, hogy a $b_1, \dots, b_n$ közül az összes lehetséges módon kiválasztunk k darabot, a kiválasztott b_i-ket összeszorozzuk, majd a kapott szorzatokat összeadjuk. Szokás a σ_0-ról is beszélni és a fenti f főegyütthatójaként konstans 1-nek tekinteni.

1.3. Tétel (K 2.5.8). *Legyen*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n = a_n(x - b_1) \cdots (x - b_n)$$

Ekkor $0 \leq k \leq n$ *esetén* $a_k = a_n(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}(b_1, b_2, \ldots b_n)$ *így*

$$\sigma_k(b_1, b_2, \ldots b_n) = (-1)^k a_{n-k}/a_n$$

Ez a gyökök és együtthatók összefüggése (Viéte-formulák).

1.1. Definíció (Euklideszi gyűrű). *Az* R *szokásos gyűrűt euklideszi gyűrűnek nevezzük, ha* R *nem nulla elemein értelmezve van egy nemnegatív egész értékű* φ *függvény (az úgynevezett euklideszi norma) a következő tulajdonsággal. Minden* $a, b \in R$, $b \neq 0$ *esetén létezik olyan* $q, r \in R$, *hogy* $a = bq + r$ *és* $r = 0$ *vagy* $\varphi(r) < \varphi(b)$.

Az egészek gyűrűje euklideszi, φ az abszolút érték. Test fölötti polinomgyűrű euklideszi, φ a fokszám. Az euklideszi gyűrűben érvényes a számelmélet alaptétele.

2. Feladatok

1. Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot $2x^2 + 2x - 3$-mal
2. Mi a maradék, ha $x^4 + x^2 + 1$-et osztjuk $x^2 + x + 1$-gyel?
3. Az alábbi f és g polinomoknak határozzuk meg a kitüntetett közös osztóját az eukideszi algoritmussal és az eredményt írjuk fel $fp + gq$ alakban, ahol p és q alkalmas polinomok.

   (1) $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ és a $g(x) = 2x^4 + 2x^2 + 2$

   (2) $f(x) = x^5 - 1$ és a $g(x) = x^3 - 1$
4. Határozzuk meg $x^4 - x^3 - x + 1$ többszörös gyökeit!
5. Számítsuk ki x alábbi két polinomjának az együtthatóit:
   $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$ és $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)(x - b_4)$
6. Határozzuk meg a $2x^4 + 2x + 3$ polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét és a gyökök reciprokainak összegét!

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.elte.hu