Algebra és számelmélet gyakorlat
2023/2024 I. félév

2023. December 01.

1. Emlékeztető

1.1. Tétel. *Ha $f \in R[x]$-nek $b \in R$ legalább k-szoros gyöke ($k \geq 1$), akkor b az f' deriváltnak legalább $k-1$-szeres gyöke.*

$$f(x) = (x-b)^k g(x) \implies \quad f'(x) = (x-b)^{k-1}\left(k \cdot g(x) + (x-b)g'(x)\right).$$

Igy a többszörös gyök az (f, f') KKO-nak is gyökei.

1.1. Definíció. *Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).*

1.2. Tétel. *Legyen T test.*

(1) Az $f \in T$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nin gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom, ha van gyöke T-ben, akkor biztosan nem irreducibilis $T[x]$-ben. Ha nincs gyöke, attól még lehet reducibilis. Példa: $\mathbb{Q}[x]$-ben $(x^2+1)^2$

(5) Gyök létezése elsőfokú irreducibilis tényezőnek felel meg.

Ezek közül csak (4) igaz $\mathbb{Z}[x]$-ben!

1.3. Tétel. *A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.*

1.1. Állítás. *Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.*

Ötlet: párosítsunk minden gyököt a komplex konjugáltjával.

1.2. Állítás. *Legyen $f = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ valós együtthatós polinom. Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f -nek, akkor c konjugáltja is gyöke f -nek.*

1.3. Állítás. *Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\bar{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek*

1.4. Tétel. *Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.*

Egy valós együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk, hogy gyöktényezőkre bontjuk $\mathbb{C}$ fölött, és mindegyik nem valós gyököt párosítjuk a komplex konjugáltjával.
Példa: $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

$\mathbb{Q}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjainak irreducibilitását eldönthetjük a racionális gyökteszt segítségével.
Példa:

1.5. Tétel (Schönemann-Eisenstein-kritérium). *Legyen f egész együtthatós, nem konstans polinom. Ha van olyan p prítmszám, amelyre:*

(1) p nem osztja f főegyütthatóját;

(2) p osztja f összes többi együtthatóját;

(3) p^2 nem osztja f konstans tagját,

akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$ fölött.

Példa: $21x^4 + 60x - 150$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. ($p = 2$ jó)

1.6. Tétel (fordított Schönemann-Eisenstein-kritérium). *Ha a p prím osztja a polinom minden együtthatóját a konstans tag kivételével, és p^2 nem osztja a főegyütthatót, a polinom akkor is irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött*

2. Feladatok

1. Végezzük el az $(x^6 + x^3 + 1) : (x^2 + x + 1)$ maradékos osztást.

2. Fejezzük ki a másodfokú egyenlet együtthatóival a gyökök különbségének négyzetét.

3. Határozzuk meg a $3x^5 + 4x^4 + x^3 - x^2 + 5x - 3$ polinom gyökeinek négyzetösszegét és a gyökök reciprokainak összegét

4. Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2!

5. Bontsuk föl a következő polinomokat az R fölött irreducibilis polinomok szorzatára:

   (1) $x^4 - 1$

   (2) $x^4 + 1$

   (3) $x^4 + 9$

   (4) $x^6 - 4x^3 + 3$

6. Irreducibilis-e $9x^7 + 30x^4 + 60$ polinom $\mathbb{Q}$ fölött?

7. Irreducibilis-e $x^{11} + 2x + 18$ polinom $\mathbb{Q}$ fölött?

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.elte.hu