

2. ZH (60 pont)
2023. December 08.

Név: _____

Mindegyik feladatban indoklás szükséges (pl. a számolás részletei), a pusztán eredményért nem jár pont. Minimum 22 pont kell az elégségeshez. Segédeszköz nem használható, kalkulátor, mobiltelefon sem. A név és a NEPTUN-kód minden lapon szerepeljen.

1. (10 points) Az alábbi $f(x)$ és $g(x)$ polinomoknak határozza meg a kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmusmal és az eredményt írja fel $f(x)p(x) + g(x)q(x)$ alakban, ahol $p(x)$ és $q(x)$ alkalmas polinomok.

$$f(x) = x^5 - 1 \quad \text{és} \quad g(x) = x^3 - 1$$

2. (10 points) Határozza meg a $2x^4 + 2x + 3$ polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét és a gyökök reciprokaik összegét!

3. (10 points) Számítsa ki a következőket:

- a.) 17 rendje modulo 29.
- b.) 4 rendje modulo 13
- c.) $\mu(630)$, ahol μ a Möbius-függvény.
- d.) $\sigma(144)$, ahol $\sigma(n)$ az n pozitív osztóinak összege!
- e.) $\varphi(100)$, ahol $\varphi(n)$ az Euler-féle φ -függvény

4. (10 points) Oldja meg a a következő kongruencia-rendszert a kínai maradéktétel segítségével!

$$5x \equiv 1 \pmod{7}$$

$$4x \equiv 1 \pmod{9}$$

$$8x \equiv 1 \pmod{13}$$

-
5. (5 points) Keresse meg azt a legkisebb n természetes számot, melyre $d(n) = 25$
6. (5 points) Egy négyjegyű természetes szám 72-vel osztva 46, 127-tel osztva 97 maradékot ad.
Melyik ez a szám?

7. (5 points) Oldja meg az alábbi kongruenciát:

$$14!x \equiv 5 \pmod{17}$$

8. (5 points) Plusz Feladat!

Tudjuk, hogy $11^{40} \equiv -1 \pmod{17}$. Bizonyítsa be, hogy 11 primitív gyök modulo 17!