SZÁMELMÉLET ELŐADÁS
Összefoglaló

2024. Február 13.

1. Oszthatóság

1.1. Definíció (FGY. 1.1.1). *A b egész számot az a egész szám osztójának nevezzük, ha létezik olyan q egész szám, hogy $a = bq$. Jelölés: $b \mid a$.*
Ha nem létezik olyan q egész, amelyre $a = bq$, akkor b nem osztója a-nak, jelölése: $b \nmid a$

1.2. Definíció (FGY. 1.1.2). *Ha egy szám minden számnak osztója, akkor egységnek nevezzük.*

1.1. Tétel (FGY: 1.1.3). *Az egész számok körében két egység van, az 1 és a -1.*

1.1. Megjegyzés. *Az oszthatóságot az egészektől különböző számkörökben (bármely integritás tartományban) be lehet vezetni. Tekintsük a páros számokat. Itt $b \mid a$ azt jelenti, hogy létezik olyan q páros szám, amelyre $a = bq$. Pl. $2 \mid 20$, de $2 \nmid 10$, sőt a 10-nek egyáltalán nincs is osztója. Ebből az is következik, hogy a páros számok körében egyáltalán nincsenek egységek.*
Ugyanakkor a $c + d\sqrt{2}$ alakú (speciális valós) számok körében, ahol c, d tetszőleges egészek, végtelen sok egység található.

1.2. Tétel (FGY: 1.1.4). *Ha ε és δ egységek és $b \mid a$, akkor $\varepsilon b \mid \delta a$ is teljesül.*

1.1. Bizonyítás. *Az ε az 1-nek is osztója, azaz alkalmas r-rel $1 = \varepsilon r$. Ha $a = bq$, akkor $\delta a = (\varepsilon b)(\delta q r)$, tehát valóban $\varepsilon b \mid \delta a$.*

1.3. Tétel (FGY: 1.1.5). *Az egész számok oszthatóságának néhány egyszerű, de fontos tulajdonsága:*

(i) *Minden a-ra* $a \mid a$

(ii) *Ha* $c \mid b$ *és* $b \mid a$, *akkor* $c \mid a$.

(iii) *Az* $a \mid b$ *és* $b \mid a$ *oszthatóságok egyszerre akkor és csak akkor teljesülnek, ha az a a b-nek egységszerese.*

(iv) *Ha* $c \mid a$ *és* $c \mid b$, *akkor* $c \mid a + b$ *és* $c \mid a - b$, *továbbá tetszőleges egész k-ra* $c \mid ka$, *illetve tetszőleges eégsz* r, s*-re* $c \mid ra + sb$.

Az $(i) - (iii)$ tulajdonságok rendre azt fejezik ki, hogy az egész számok oszthatósága reflexív, tranzitív, de nem szimmetrikus reláció.

2. Maradékos osztás

2.1. Tétel (FGY: 1.2.1). *Tetszőleges a és* $b \neq 0$ *egész számokhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott q és r egész számok, amelyekre*

$$a = bq + r \qquad \textit{és} \qquad 0 \leq r \leq |b|$$

A maradékos osztásnál kapott q számot *hányados*nak, az r-et pedig (legkisebb nemnegatív) *maradék*nak nevezzük. A $b \mid a$ oszthatóság ($b \neq 0$ esetén) pontosan akkor teljesül, ha a maradék 0. Gyakran kéényelmesebb, ha negatív maradékokat is megengedjük. Erre vonatkozik az előző tétel alábbi variánsa:

2.2. Tétel (FGY: 1.2.1 A). *Tetszőleges a és* $b \neq 0$ *egész számokhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott q és r egész számok, amelyekre*

$$a = bq + r \qquad \textit{és} \qquad -\frac{|b|}{2} \leq r \leq \frac{|b|}{2}$$

Ebben az esetben az r-et *legkisebb abszolút értékű maradék*nak nevezzük.

2.1. Példa. *Legyen* $a = 30,\ b = -8$, *ekkor*

$$30 = (-8)(-3) + 6 = (-8)(-4) - 2,$$

tehát a legkisebb nemnegatív maradék a 6, *a legkisebb abszolútértékű maradék pedig a* -2.

A következő tételből ltáni fogjuk, hogy a maradékos osztás felhasználható a pozitív egész számok ún. *számrendszer*es felírásához is.

2.3. Tétel (FGY: 1.2.2). *Legyen $t > 1$ rögzített egész. Ekkor bármely A pozitív egész egyértelműen felírható az alábbi alakban:*

$$A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0, \quad \textit{ahol} \quad 0 \leq a_i < t \quad \textit{és} \quad a_n \neq 0.$$

Az A szám fenti előállításában az a_i számok az A számjegyei t alapú számrendszerben(ha $t > 10$, akkor a $0, 1, 2, \ldots, 9$ mellett további számjegyeket is be kell vezetni). A fenti előállítást

$$A = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_{0[t]} \quad \text{vagy} \quad A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_{[t]}$$

alakban jelöljük.

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.elte.hu