

## 5. feladatsor, 2024 tavasz

Számelmélet (tanár, 4. félév)

1. Keressünk a 7-tel kongruens számokat  $(\text{mod } 10)$ .
2. Melyik állítás igaz a következők közül?
  - (a)  $a^2 \equiv b^2 \pmod{31}$  esetén  $a \equiv \pm b \pmod{31}$  is igaz.
  - (b)  $a^2 \equiv b^2 \pmod{35}$  esetén  $a \equiv \pm b \pmod{35}$  is igaz.
  - (c)  $a^2 \equiv b^2 \pmod{27}$  esetén  $a \equiv \pm b \pmod{27}$  is igaz.

3. Írjunk fel egy nem megoldható lineáris kongruenciát.

4. Oldjuk meg a következőt Euklideszi algoritmussal:

$$222x \equiv 306 \pmod{87}.$$

5. Hogyan lehet ügyesen megoldani az alábbi kongruenciákat:

- $202x \equiv 157 \pmod{203}$ ;
- $109x \equiv 157 \pmod{203}$ ;
- $309x \equiv 453 \pmod{617}$ ;
- $58x \equiv 145 \pmod{203}$ ;
- $58x \equiv 146 \pmod{203}$ ;

6. Lássuk be kongruencia segítségével, hogy  $a - b \mid a^n - b^n$ , ahol  $a, b$  egészek,  $n$  pedig egy pozitív egész.

7. Lássuk be, hogy  $(\text{mod } 6)$  kongruens  $a^3 - b^3$  és  $a - b$ .

8. Keressük meg a  $25x + 35y = 1000$  diofantikus egyenlet egyik megoldását. Hogyan lehet ennek alapján megtalálni az összes megoldást?

9. (a) Lássuk be, hogy ha  $a$  és  $b$  relatív prímelek, akkor  $d(ab) = d(a)d(b)$ .
- (b) Lássuk be, hogy ha  $a$  és  $b$  nem relatív prímelek, akkor  $d(ab) < d(a)d(b)$ .

10. Legyen  $F_n := 2^{2^n} + 1$ . Ekkor  $F_n = F_0 F_1 \dots F_{n-1} + 2$

11. Készítsünk és oldjunk is meg egy feladatot a sokfejű sárkányok fejének levágásáról.