

# Számelmélet gyakorlat

## 2023/2024 II. félév

2024. Április 11.

### 1. Emlékeztető

**1.1. Tétel (Euler-Fermat tétel).** Ha  $a \in \mathbb{Z}$  és  $(a, m) = 1$ , akkor

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

**1.1. Következmény.** Ha  $a \in \mathbb{Z}$  és  $(a, m) = 1$ , akkor tetszőleges  $k, l \in \mathbb{Z}$  kitevők esetén

$$k \equiv l \pmod{\varphi(m)} \Rightarrow a^k \equiv a^l \pmod{m}$$

**1.2. Tétel (Kis Fermat-tétel).** Ha  $p$  prímszám, akkor

- $p \nmid a$  esetén  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
- minden  $a \in \mathbb{Z}$ -re  $a^p \equiv a \pmod{p}$

### 2. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy  $n^{11} + 10n$  osztható 11-gyel, ha  $n$  tetszőleges egész szám!
2. Mennyit ad 20-al osztva maradékul  $3423^{3423}$ ?
3. Mennyit ad 11-gyel osztva maradékul  $123^{765}$ ?
4. Mennyit ad 44-gyel osztva maradékul  $4447^{2018}$ ?

5. Milyen maradékot ad 13-mal osztva  $42^{600}$ ?
6. Mi lesz  $39^{39^{390}}$  szám utolsó két számjegye?
7. Határozzuk meg a  $243^{402}$  utolsó három jegyét!
8. Mit ad 7-tel osztva maradékul  $2^{102} + 3^{201}$ ?
9. Határozzuk meg  $2^{1526}$  maradékát mod 17
10. Határozzuk meg  $7777777^{654321}$  utolsó két számjegyét.
11. Határozzuk meg  $931^{49^{82}}$  46-tal vett (legkisebb) maradékát.
12. Bizonyítsuk be, hogy  $n^7 - n$  osztható 42-vel, ha  $n$  tetszőleges egész szám!
13. Egy szigeten 7- és 11-fejű sárkányok élnek. Egy királyfi le akarta győzni az összeset, ezért megszámlolta, hány feje van a sárkányoknak összesen (hogyan tudja, mire vállalkozik).
  - (1) Hány sárkány van, ha 75 fejet számolt?
  - (2) 59 fejet számolt. Igazoljuk, hogy elszámolta.
  - (3) Most számolás előtt levágta az összes sárkánynak 1 – 1 fejét és ezután 40 fejet számolt.

Hány sárkány lehetett összesen?

---

Müllner Károly  
Email: [mullni@hotmail.com](mailto:mullni@hotmail.com)  
<https://mullni.web.elte.hu>