Algebra és számelmélet gyakorlat
(matematika BSc)
2024/2025 I. félév

2024. Október 14.

1. Komplex számok II.

1.1. Emlékeztető - Műveletek trigonometrikus alakban

Szorzás/osztás: Legyenek:

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1| \cdot (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \\ z_2 &= |z_2| \cdot (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \end{aligned}$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1||z_2| \cdot (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)) \end{aligned}$$

Geometriai jelentés: forgatva-nyújtás!

Hatványozás (Moivre-képlete): Legyen $z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ Ekkor:

$$z^n = |z|^n (\cos(n \cdot \alpha) + i \sin(n \cdot \alpha))$$

Gyökvonás képlet: n db. gyök!

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \right),$$

ahol $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

1.1. Definíció. *Az $\varepsilon \in \mathbb{C}$ számot n-edik komplex egységgyöknek nevezzük, ha $\varepsilon^n = 1$. Egy komplex szám egységgyök, ha n-edik egységgyök alkalmas pozitív n egészre.*

Például az i szám negyedik egységgyök, hiszen $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i^1 = i, \ldots$. Vagyis a hatványok periodikusan ismétlődnek. Ha lerajzoljuk őket, egy négyzetet kapunk, melynek a középpontja az origó, az egységkörbe írható, és az egyik csúcsa az 1.

Az n-edik egységgyököket trigonometrikus alakban keressük. Mivel $\varepsilon^n = 1$ és az abszolút érték szorzattartó, $|\varepsilon|^n = 1$, azaz $|\varepsilon| = 1$. Ha ε szöge α, akkor

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha = \varepsilon^n = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0).$$

1.1. Tétel. *Az n-edik egységgyökök száma pontosan n, ezek az*

$$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n) = \varepsilon_1^k$$

képlettel definiált $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = 1$

1.2. Definíció. *Az n-ed rendű komplex számokat primitív n-edik komplex egységgyöknek nevezzük. Ezek mind az n-edik egységgyök között vannak. Azok az ε_k számok lesznek primitív n-edik egységgyökök, melyekre $(k, n) = 1$.*

1.2. Tétel. *Az primitív n-edik egységgyökök pontosan az*

$$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$$

alakú számok, ahol k és n relatív prímek és $0 \leq k < n$. Számuk $\varphi(n)$. Egy komplex szám akkor és csak akkor n-edik primitív egységgyök, ha a hatványai pontosan az összes n-edik egységgyök.