

# Algebra és számelmélet gyakorlat

## 2024/2025 I. félév

2024. November 08.

### 1. Emlékeztető

**1.1. Definíció (Előjeles aldetermináns).** *Tekintsünk egy  $n$ -edrendű determinánst. Hagyjuk el az  $i$ -edik sort és a  $j$ -edik oszlopot, így egy  $(n-1) \times (n-1)$ -es determináns keletkezik. Az  $a_{ij}$  elemhez tartozó  $A_{ij}$  előjeles aldetermináns ennek a determinánsnak a  $(-1)^{i+j}$ -szeresét értjük.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ esetén } A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6.$$

**1.1. Tétel (Kifejtési tétel).** *Ha egy sor minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, az így kapott szorzatoknak az összege a determinánssal egyenlő.*

$$\det A = \alpha_{i1}A_{i1} + \alpha_{i2}A_{i2} + \cdots + \alpha_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}A_{ij}.$$

*Ezt hívjuk a determináns  $i$ -edik sor szerinti kifejtésének. Természetesen hasonló állítás érvényes sorok helyett oszlopokra is.*

Példa:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

**1.2. Tétel (Ferde kifejtési tétel).** *Ha egy sor elemeit rendre egy másik sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal szorozzuk meg, az így kapott szorzatoknak az összege mindig 0.*

$$\det A = \alpha_{r1}A_{k1} + \alpha_{r2}A_{k2} + \cdots + \alpha_{rn}A_{kn} = \sum_{j=1}^n \alpha_{rj}A_{kj} = 0.$$

Itt a kifejtés szó megtévesztő, mert az összeg értékének semmi köze sincs az eredeti determinánshoz; ez az összeg mindig 0, függetlenül attól, hogy maga a determináns 0 vagy sem.

Példa: Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -12 + 30 - 18 = 0.$$

**1.2. Definíció (Adjungált).** *Legyen  $A \in \mathbb{C}^{k \times n}$ . Ekkor  $A$  adjungáltján azt a  $B \in \mathbb{C}^{n \times k}$  mátrixot értjük, amelyre  $\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$  (ahol  $\bar{z}$  a  $z$  komplex szám konjugáltját jelenti). Az  $A$  mátrix adjungáltját  $A^*$ -gal jelöljük.*

Egy mátrix adjungáltja tehát a transzponáltjának a konjugáltja. Valós elemű  $A$  esetén nyilván  $A^* = A^T$

**1.3. Tétel.** *Az  $M$  négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha  $\det(M) \neq 0$  és ekkor az inverz képlete*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} ((M_{ji}))$$

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk és elosztjuk  $M$  determinánsával.

Példa:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

**1.4. Tétel (Cramer szabály).** *Jelölje  $M_j$  azt a mátrixot, amelyet az  $M$ -ből úgy kapunk, hogy a  $j$ -edik oszlop helyére a  $b$  oszlopvektort tesszük. Ha  $\det(M) \neq 0$ , akkor a megoldás*

$$x_j = \frac{\det(M_j)}{\det(M)}$$

Példa:

$$\begin{aligned}2x - 3y &= 1 \\5x - 2y &= 8\end{aligned}$$

Megoldás:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 + 24}{-4 + 15} = \frac{22}{11} = 2$$

illetve

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16 - 5}{-4 + 15} = \frac{11}{11} = 1$$

### 1.5. Tétel (Vandermonde-determináns).

$$V(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_1^2 & \dots & \gamma_1^{n-1} \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_2^2 & \dots & \gamma_2^{n-1} \\ 1 & \gamma_3 & \gamma_3^2 & \dots & \gamma_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \gamma_n & \gamma_n^2 & \dots & \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\gamma_i - \gamma_j).$$

**1.1. Bizonyítás.** Vonjuk ki jobbról balra haladva minden oszlopból az őt megelőző oszlop  $\gamma_1$ -szeresét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \gamma_2 - \gamma_1 & \gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_2 & \dots & \gamma_2^{n-1} - \gamma_1\gamma_2^{n-2} \\ 1 & \gamma_3 - \gamma_1 & \gamma_3^2 - \gamma_1\gamma_3 & \dots & \gamma_3^{n-1} - \gamma_1\gamma_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \gamma_n - \gamma_1 & \gamma_n^2 - \gamma_1\gamma_n & \dots & \gamma_n^{n-1} - \gamma_1\gamma_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Most vonjuk le minden sorból az első sort, ezzel az első oszlop utolsó  $n - 1$  eleme is 0 lesz, a többi elem pedig nem változott. A második, harmadik stb.

sorból rendre  $\gamma_2 - \gamma_1$ -et,  $\gamma_3 - \gamma_1$ -et stb. kiemelhetünk. Ezzel a:

$$(\gamma_2 - \gamma_1) \cdots (\gamma_n - \gamma_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_2^{n-2} \\ 0 & 1 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \gamma_n & \cdots & \gamma_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

alakra jutunk, amivel

$$(\gamma_2 - \gamma_1) \cdots (\gamma_n - \gamma_1) V(\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n)$$

egy eggyel kisebb rendű Vandermonde-determinánsra vezettük vissza. Ezt megismételve (vagy teljes indukcióval) adódik a tétel. ■

## 2. Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat a felső háromszög alakra hozás módszerével, azaz Gauss-eliminációval!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

2. Hány inverzió van az alábbi permutációkban?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

3. Hány inverzió lehet maximum egy 5 elemű halmaz egy páratlan permutációjában?
4. Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását és előjelét.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását és előjelét.

$$(1234)(35)(1432)(35); \quad (12345)(234)(12345)^{-1}; \quad [(12)(23)(34)]^{1222}.$$

Házi Feladat: Számítsuk ki az alábbi determinánst!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix};$$

---

Müllner Károly  
Email: mullni@hotmail.com  
<https://mullni.web.elte.hu>