Algebra és számelmélet gyakorlat
(matematika BSc)
2024/2025 I. félév

2024. Novemober 11.

1. Emlékeztető

1.1. Definíció (Permutáció). *Legyen X (rendszerint véges) halmaz. Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezzük. Ezek összeségét S_X jelöli. S_n az $(1, 2, \ldots, n)$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az S_n elemszáma $n!$.*

A permutáció jelölése:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

azt jelenti, hogy $f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 3,\ f(4) = 1$. Az f függvény a felső sor minden elemét az alatta lévőbe képezi.

1.2. Definíció (Transzpozíció). *Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$. Az x és y cseréje az az $f(x, y)$-nal elölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, az X többi elemét pedig fixen hagyja, azaz saját magába képezi. Az ilyen permutációkat cserének vagy transzpozíciónak hívjuk.*

1.1. Tétel. *Minden permutáció cserék (transzpozíciók) szorzata.*

Példa:

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

előállítása cserék szorzataként: $f = (3,5)(1,4)(1,2)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

f többféleképpen is felírható cserék szorzataként:
$f = (1,2)(2,4)(3,5) = (1,5)(1,4)(3,5)(1,2)(3,4)$ is igaz.

1.3. Definíció (Inverzió). *Legyen $f \in S_n$ egy permtáció és $1 \leq i < j \leq n$. Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak. Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.*

Példa:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzió: $21, 43, 41, 53, 51, 31$. Nem inverzió: $24, 25, 23, 45$. Az inverziók száma tehát: 6.

1.4. Definíció (Permutáció előjele). *Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros. Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $sg(f) = 1$. Az f permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan. Ekkor az f előjele -1. Jelölés: $sg(f) = -1$. Vagyis ha az inverziók száma j, akkor $sg(f) = (-1)^j$.*

1.2. Tétel. *Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.*

1.5. Definíció (Ciklus). *Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots, \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$ és X többi eleme a helyén (fixen) marad. Neve: ciklus, melynek hossza k. Diszjunkt ciklusok: nincs közös elemük.*

1.3. Tétel. *Ha X véges halmaz, akkor minden S_X-beli permutáció a sorrendtől eltekintve egyértelműen felírható páronként diszjunkt ciklusok szorzataként.*

1.1. Következmény. *Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. Egy permutáció pontosan akkor páratlan, ha ciklusfelbontásában a páros hosszú ciklusok száma páratlan.*