Algebra és számelmélet gyakorlat
(matematika BSc)
2024/2025 I. félév

2024. November 15.

1. Emlékeztető

1.1. Definíció (Pitagoraszi számhármasok). *A pitagoraszi számhármasok, amelyek olyan a, b és c pozitív egész számok, amelyre*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

1.1. Tétel. *Legyen a, b, c primitív pitagoraszi számhármas, azaz $\exists\ a, b, c \in \mathbb{Z}^+$*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

és

$$(a, b, c) = 1$$

Ekkor $u, v \in \mathbb{Z}^+,\ u > v,\ (u, v) = 1,\ u \not\equiv v \pmod 2$, hogy

$$a = u^2 - v^2,\ b = 2uv,\ c = u^2 + v^2,$$

Mivel minden pitagoraszi számhármas egy primitív pitagoraszi számhármas többszöröse, ezért általában az alábbi igaz:

1.2. Tétel. *Legyen a, b, c pitagoraszi számhármas. Ekkor $\exists\ t, u, v \in \mathbb{Z}^+$, melyekre $u > v,\ (u, v) = 1,\ u \not\equiv v \pmod 2$ és*

$$a = (u^2 - v^2)t,\ b = 2uvt,\ c = (u^2 + v^2)t,$$

vagy

$$a = 2uvt,\ b = (u^2 - v^2)t,\ c = (u^2 + v^2)t.$$

1.3. Tétel (Fermat-sejtés). *A* $x^n + y^n = z^n$ *egyenletnek* $n \geq 3$ *esetén nincs pozitív egész számokból álló megoldása.*

1.4. Tétel (Kínai maradéktétel). *Legyenek* $m_1, m_2, \ldots, m_k > 0$ *páronként relatív prímek,* $c_1, c_2, \ldots c_k$ *pedig tetszőleges egészek. Ekkor az*

$$\begin{aligned} x &\equiv c_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv c_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv c_k \pmod{m_k} \end{aligned}$$

kongruencia-rendszer bármilyen $c_1, c_2, \ldots c_k$ *esetén megoldható, és a megoldás egyetlen maradékosztály* $\pmod{M}$*, ahol* $M = m_1 m_2 \cdots m_k$*.*

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.elte.hu