

Algebra és számelmélet gyakorlat

(matematika BSc)
2024/2025 I. félév

2024. December 02.

1. Absztrakt algebra

1. Írjuk föl a modulo 5 és a modulo 6 összeadás és szorzás táblázatát. Végezzük el a $2 : 3$ osztást modulo 5. Tudunk-e osztani \mathbb{Z}_5 minden nem nulla elemével? Igaz-e, hogy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla? Mi a helyzet modulo 6?
2. Hány nullosztó van \mathbb{Z}_4 -ben?
3. Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e? Amelyek gyűrűk, azokban mik az invertálható elemek?
 - (1) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
 - (2) $\mathbb{G} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve. (Gauss egészek)
 - (3) $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
 - (4) $\{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
4. Mutassuk meg, hogy a \mathbb{Z}_6 gyűrűben $R = \{0, 2, 4\}$ részgyűrűt alkot. Egységelemes gyűrű-e, illetve test-e az R gyűrű?

2. Polinomok

1. Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot $2x^2 + 2x - 3$ -mal
2. Mi a maradék, ha $x^4 + x^2 + 1$ -et osztjuk $x^2 + x + 1$ -gyel?
3. Az alábbi f és g polinomoknak határozzuk meg a kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal és az eredményt írjuk fel $fp + gq$ alakban, ahol p és q alkalmas polinomok.
 - (1) $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ és a $g(x) = 2x^4 + 2x^2 + 2$
 - (2) $f(x) = x^5 - 1$ és a $g(x) = x^3 - 1$
4. Határozzuk meg $x^4 - x^3 - x + 1$ többszörös gyökeit!
5. Számítsuk ki x alábbi két polinomjának az együtthatóit:
 $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$ és $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)(x - b_4)$
6. Határozzuk meg a $2x^4 + 2x + 3$ polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét és a gyökök reciprokaik összegét!

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
<https://mullni.elte.hu>