Algebra és számelmélet gyakorlat
2024/2025 I. félév

2024. December 13.

1. Emlékeztető

1.1. Tétel. *A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$ (Euler-függvény). Ezek $\epsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n), ahol (k,n) = 1$.*

1.1. Definíció (Körosztási polinom). *Ha $n \geq 1 >$ egész, akkor Φ_n az n-edik körosztási polinom:*

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_{\varphi(n)})$$

ahol $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n. Tehát Φ_n-nek egyszeres gyökei a primitív n-edik egységgyökök.

Példák:

- $\Phi_1(x) = x - 1$
- $\Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1$
- $\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1$

vagy

$$\Phi_3(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = x^2 + x + 1$$

illetve

$$\Phi_6(x) = \left(x - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = x^2 - x + 1$$

1.2. Tétel. *Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(n) = x^n - 1$. Ezért mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.*

Példa:

$\Phi_1(x)\Phi_3(x) = x^3 - 1$, ezért:

$$\Phi_3(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

Legyen p prím, ekkor $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$ Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$$

Nézzük $n = 6$-ra:

$$\Phi_6(x) = \frac{x^6 - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)} = \frac{x^6 - 1}{(x+1)(x^3-1)} = x^2 - x + 1$$

1.3. Tétel. *Ha $m|n$ és a prímosztóik ugyanazok, akkor $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$*

Példa:

$\Phi_4(x) = \Phi_2(x^2) = x^2 + 1$, $\Phi_{12}(x) = \Phi_6(x^2) = x^4 - x^2 + 1$.
Ha p prím, akkor $\Phi_{p^k}(x) = \Phi_p(x^{p^{k-1}})$. Így $\Phi_{27}(x) = x^{18} + x^9 + 1$.

1.4. Tétel. *Mindegyik körosztási polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$ fölött.*

2. Feladatok

1. Számítsuk ki Φ_{12}-t a fent módszerrel, amit a Φ_6-ra alkalmaztunk!
2. Számítsuk ki a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat!
3. Számítsuk ki az n-edik körosztási polinomot minden $n \leq 20$ egészre!
4. Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával a 12-dik, a 18-adik illetve a 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát!
5. Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$
6. Számítsuk ki az utolsó elötti tétel [?] alapján a $\Phi_n(x)$-et, ha $n = 36, 72, 144, 100$!

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.elte.hu