2. ZH (55 pont)
2024. December 06. Név: ______________________

> Mindegyik feladatban indoklás szükséges (pl. a számolás részletei), a puszta eredményért nem jár pont. Minimum 22 pont kell az elégségeshez. Segédeszköz nem használható, kalkulátor, mobiltelefon sem. A név és a NEPTUN-kód minden lapon szerepeljen.

1. (10 points) Az alábbi $f(x)$ és $g(x)$ polinomoknak határozza meg a kitüntetett közös osztóját az eukideszi algoritmussal és az eredményt írja fel $f(x)p(x) + g(x)q(x)$ alakban, ahol $p(x)$ és $q(x)$ alkalmas polinomok.
$$f(x) = x^5 - 1 \quad \text{és} \quad g(x) = x^3 - 1$$

2. (5 points) Adjunk meg olyan pitagoraszi számhármast, melynek egyik eleme 198.

3. (10 points) Számítsa ki a következőket:

   a.) 17 rendje modulo 29.

   b.) 4 rendje modulo 13

   c.) $\mu(630)$, ahol μ a Möbius-függvény.

   d.) $\sigma(144)$, ahol $\sigma(n)$ az n pozitív osztóinak összege!

   e.) $\varphi(420)$, ahol $\varphi(n)$ az Euler-féle φ-függvény

4. (10 points) Oldja meg a a következő kongruencia-rendszert a kínai maradéktétel segítségével!

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod{7} \\ 4x &\equiv 1 \pmod{9} \\ 8x &\equiv 1 \pmod{13} \end{aligned}$$

5. (5 points) Melyik a legkisebb prím, amelyre $o_p(3) = 5$?

6. (5 points) Egy négyjegyű természetes szám 72-vel osztva 46, 127-tel osztva 97 maradékot ad. Melyik ez a szám?

7. (5 points) Oldjuk meg az alábbi kongruenciát úgy, hogy a felírt kongruenciát visszavezetjük prímszámhatvány-modulusú kongruenciákra:

$$3x^2 + 5x - 2 \equiv 0 \pmod{12}$$

8. (5 points) Plusz Feladat!
Tudjuk, hogy $11^{40} \equiv -1 \pmod{17}$. Bizonyítsa be, hogy 11 primitív gyök modulo 17!