

Közelítő és szimbólikus számítások II.

Müllner Károly

<mullni@hotmail.com>

Programtervező matematikus hallgató

Szegedi Tudományegyetem Természettudományi Kar

1. Függvényközelítések

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy más függvények, hogyan közelíthetők polinomokkal. Az ilyen közelítések fontosak, mind elméleti, mind gyakorlati szempontból. Lehetővé teszik új numerikus eljárások levezetését. Hangsúlyozzuk, hogy komolyabb alkalmazásokhoz, sokkal kifinomultabb, többnyire racionális törtfüggvényeken alapuló eljárások szükségesek.

1.1. Lagrange interpoláció

Kiindulópontunk a következő probléma:

POLINOM-INTERPOLÁCIÓS FELADAT:

Adott az $n \geq 1$ természetes szám, a páronként különböző $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ **interpolációs alappontok** és az $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ értékek.

Határozzuk meg olyan legfeljebb $n - 1$ -ed fokú $P_n(x)$ **interpolációs polinomot**, amely eleget tesz a

$$P_n(x_i) = f_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

interpolációs feltételeknek. Az f_i számok a közelítendő $f(x)$ függvénynek az alappontokban felvett értékei. Ezen kívül a feladat kitűzése nem igényel $f(x)$ -ről egyéb információt. Az alappontokra nem teszünk semmilyen kikötést, azon kívül, hogy páronként különbözőek. Belátjuk, hogy a (1) feladat egyértelműen megoldható.

1. Definíció. *Definiáljuk minden $1 \leq i \leq n$ -re az*

$$L_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x - x_i)(x_i - x_1)(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \quad (2)$$

úgynevezett Lagrange-féle bázispolinomokat.

Könnyen belátható, hogy

- (a) minden $L_i(x)$ pontosan $n - 1$ -ed fokú polinom, és
- (b) az alappontokban felvett értékeire $L_i(x) = \delta_{ik}$ teljesül.

Ha bevezetjük az $\omega_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ egy főegyütthatós n -ed fokú polinomot, egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy $L_i(x)$ a tömörebb

$$L_i(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega'_n(x_i)} \quad (3)$$

alakban is felírható.

2. Következmény. A (1) interpolációs probléma megoldható, egy lehetséges megoldása a

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i L_i(x) = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega'_n(x_i)} \quad (4)$$

Lagrange-féle interpolációs polinom.

3. Bizonyítás. Az $L_i(x)$ bázispolinomok (a) tulajdonságából következik, hogy $P_n(x)$ legfeljebb $n - 1$ -ed fokú polinom, a (b) tulajdonság alapján pedig triviálisan teljesülnek a $P_n(x) = f_i$ interpolációs feltételek. $\square$

Egyértelműség:

4. Tétel. Tetszőlegesen választott alappontok és függvényértékek esetén a (1) interpolációs probléma megoldása egyértelmű.

5. Bizonyítás. Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy létezik két különböző megoldás, $\bar{P}_n(x)$ és $\hat{P}_n(x)$. Képezve az $S(x) = \bar{P}_n(x) - \hat{P}_n(x)$ különbségpolinomot, látható, hogy $S(x)$ -nek legalább n zérushelye van, hiszen bármely alappontokban $S(x_i) = \bar{P}_n(x_i) - \hat{P}_n(x_i) = f_i - f_i = 0$. Mivel $S(x)$ fokszáma legfeljebb $n - 1$, ez csak úgy lehet, hogy, ha $S(x) \equiv 0$, ami viszont ellentmond annak, hogy két különböző interpolációs polinom létezéséből indultunk ki. $\square$

Képlethiba Arra a kérdésre keressük a választ, hogy mekkora lehet az $f(x) - P_n(x)$ eltérés. Az alappontokban, vagyis ha $x = x_i$, a hiba triviálisan 0. Ezért ezektől eltérő, rögzített $\bar{x}$ helyen vizsgáljuk a hibát. Legyen $f(x)$ n -szer differenciálható azon a legszűkebb $[a, b]$ intervallumon, amely tartalmazza $\bar{x}$ -t és az összes x_i alappontot.

Vezessük be a

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - P_n(x) - \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(\bar{x})} (f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}))$$

segédfüggvényt. Ez a $g(x)$ nyilvánvalóan n -szer differenciálható az $[a, b]$ -n, az n -edik derivált:

$$g^n(x) = f^n(x) - \frac{n!}{\omega_n(\bar{x})} (f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})),$$

hiszen a legfeljebb $n - 1$ -ed fokú $P_n(x)$ polinom n -edik deriváltja azonosan 0, az egy főegyütthatós $\omega_n(x)$ -é meg pontosan $n!$ lesz.

Mivel Rolle tétele szerint tetszőleges két zérushely által meghatározott intervallumban a $g'(x)$ derivált is felveszi a 0 értéket, beláttuk, hogy $[a, b]$ -ben $g'(x)$ -nek n különböző zérushelye van. Így belátható, hogy még az n -edik derivált is eltűnik legalább egy helyen, azaz van olyan $\xi \in [a, b]$, amelyben

$$g^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - \frac{n!}{\omega_n(\bar{x})} (f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})) = 0,$$

ahonnan átrendezés után a képlethibára az

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{\omega_n(\bar{x})}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

formulát kapjuk.

Az abszolút hiba Ha $f_n(x)$ korlátos $[a, b]$ -ben, akkor az abszolút hibára rögtön felírható:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{|\omega_n(x)|}{n!} \mu_n$$

felső becslés, amelyben μ_n az $|f^{(n)}(x)|$ tetszőleges $[a, b]$ -n vett felső korlátját jelenti.

Közelítés hibája Az abszolút hibakorlátból következik, hogy

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |\omega_n(x)|}{n!} \mu_n. \quad (5)$$

Rögzített $[a, b]$ intervallum, $f(x)$ függvény és n esetén is marad még egy lehetőségünk a képlethiba csökkentésére. Ha megvizsgáljuk (5) korlátot, észrevehetjük, hogy ez úgy javítható, ha $\max_{x \in [a, b]} |\omega_n(x)|$ -et minimalizáljuk az n darab alappontra alkalmas választásával. Tegyük fel, hogy a $[-1, 1]$ intervallumon interpolálunk. Defináljuk a $[-1, +1]$ -en értelmezett $T_n(x)$ n -edik Csebisev-polinomot és legyen $T_{-1}(x) \equiv 0$ és

$$T_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \cos n \arccos x$$

ha $n > 0$. $T_n(x)$ legfontosabb tulajdonságait a következő állításokban foglaljuk össze.

6. Lemma. $T_0(x) \equiv 1$, $T_1(x) = x$, továbbá tetszőleges $1 \leq n$ -re

- (i) Érvényes a $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ rekurzió.
- (ii) $T_n(x)$ pontosan n -ed fokú 2^{n-1} főegyütthatós polinom.
- (iii) Ha az n szám páros (páratlan), akkor $T_n(x)$ páros (páratlan) függvény.
- (iv) $T_n(x)$ -nek n db. különböző valós gyöke van $[-1, 1]$ -ben:

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad 1 \leq k \leq n.$$

Számos alkalmazásnál kényelmesebb a $t_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ polinomokkal dolgozni.

7. Lemma. *Tetszőleges 1 főegyütthatós n -ed fokú $p(x) \neq t_n(x)$ polinomra igaz a*

$$\max_{x \in [-1, 1]} |t_n(x)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} |p_n(x)|$$

egyenlőtlenség.

Ebből a minimum-tulajdonságból azonnal következik, hogy $\max_{x \in [-1, 1]} |\omega_n(x)|$ pontosan akkor lesz minimális, ha $t_n(x)$ gyökeit, az $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ számokat vesszük interpolációs alappontokként. Ezeket a gyököket **Csebisev-alappontoknak** nevezzük.

1.2. Osztott differenciák

Olyan formulákat adunk meg, amelyek segítségével $O(n^2)$ művelettel felírható az n darab alapponthoz tartozó interpolációs polinom. $P_{i, i+1, \dots, i+k}(x)$ a $k+1$ darab $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ alapponthoz tartozó interpolációs polinomot jelenti. Ezekre felírható egy egyszerű rekurzió:

8. Lemma. *Bármely $1 \leq i < i+k \leq n$ -hez egyértelműen létezik olyan $\beta_{ik} \in \mathbb{R}$ valós konstans, amellyel*

$$P_{i, i+1, \dots, i+k}(x) = P_{i, i+1, \dots, i+k-1}(x) + \beta_{ik}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_{i+k-1}).$$

9. Bizonyítás. *Mivel $S(x) \stackrel{\text{def}}{=} P_{i, i+1, \dots, i+k}(x) - P_{i, i+1, \dots, i+k-1}(x)$, a két interpolációs polinom különbsége legfeljebb $k-1$ -ed fokú és az $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}$ alappontok biztosan zérushelyei, ezért gyöktényezős alakja csak $\beta_{ik}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_{i+k-1})$ lehet valamely alkalmas $\beta_{ik} \in \mathbb{R}$ -rel, ez pedig ekvivalens a bizonyítandó egyenlőséggel. $\square$*

Vezessünk be új jelöléseket az előbbi konstansokra, legyen $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{ik}$ és nevezzük ezeket az $f(x)$ függvény $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ alappontokhoz tartozó **osztott differenciáinak**.

10. Lemma. *Tetszőleges $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ alappontokra igaz:*

- (i) *az $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]$ osztott differencia az alappontok szimmetrikus függvénye,*
- (ii) $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$

11. Bizonyítás. *Az (i) tulajdonság egyszerűen adódik abból, hogy az osztott differenciákat az interpolációs polinomnak a (8) Lemmában bizonyított egyértelmű előállításával vezettük be, és maga a polinom független az alappontok megadásának sorrendjétől.*

Az (ii) tulajdonság bizonyítása: $\square$

12. Következmény (Az interpolációs polinom osztott differenciás alakja).

Az n darab alapponthoz tartozó interpolációs polinom előállítható a következő módon is:

$$P_{1,2,\dots,n}(x) = f_1 + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ \dots + f[x_1, x_2, \dots, x_k](x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})$$

13. Bizonyítás. A (8) Lemmát az $i = 1$ esetre alkalmazva:

$$P_{1,2,\dots,k}(x) = P_{1,2,\dots,k-1}(x) + f[x_1, x_2, \dots, x_k](x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})$$

bármely $1 < k \leq n$ -re, amiből k szerinti indukcióval megkapjuk a bizonyítandó állítást. $\square$

Képlethiba Legyen $\bar{x}$ az alappontoktól különböző tetszőleges rögzített érték. Ezt az $\bar{x}$ -t $n + 1$ -edik alappontnak tekintve, a megfelelő $P_{n+1}(x)$ interpolációs polinom osztott differenciás alakja:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}](x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Az $x = \bar{x}$ helyettesítéssel ebből:

$$f(\bar{x}) = P_n(\bar{x}) + f[x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}](\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2) \dots (\bar{x} - x_n),$$

tehát a keresett hibaképlet:

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = f[x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}]\omega_n(\bar{x}).$$

Az osztott differenciák definíciója kiterjeszthető ismétlődő alappontok esetére is, tehát tetszőleges x -re

$$f(x) - P_n(x) = f[x_1, x_2, \dots, x_n, x]\omega_n(x).$$

Ha $f(x)$ teljesíti a megfelelő differenciálhatósági feltételeket, a korábbi Lagrange-féle hibatag is felírható, ahonnan az

$$f[x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}]\omega_n(\bar{x}) = \frac{\omega_n(\bar{x})}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

illetve az

$$f[x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

egyenlőség következik.

14. Következmény. Legyen $f(x) \in \mathbb{C}^n[a, b]$ és $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ $n + 1$ darab páronként különböző szám $[a, b]$ -ben. Ekkor létezik olyan $\eta \in [a, b]$, amellyel teljesül az

$$f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}$$

egyenlőség.

Az $n = 1$ eset pontosan a Lagrange-tételt adja.

15. Következmény. Tetszőleges adott $x_1, x_2, \dots, x_n$ alappontok és $f_1, f_2, \dots, f_n$ függvényértékek, továbbá tetszőleges $\bar{x} \in \mathbb{R}$ esetén

- (i) $\frac{3}{2}n^2 + O(n)$ művelettel meghatározhatók az interpolációs polinom előállításához felhasznált $f[x_1, x_2], f[x_1, x_2, x_3], \dots, f[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ osztott differenciák.
- (ii) Ezután a $P_n(\bar{x})$ helyettesítési érték kiszámításához elegendő $O(n)$ művelet.

1.3. Véges differenciák

Az interpoláció némely alkalmazásánál szokás ekvidisztáns (szomszédos alappontok távolsága egy konstans) alappontokkal dolgozni, azaz interpolációs alappontjainkat $x_i = x_0 + ih$ $i = 0, 1, \dots, n-1$ alakban adjuk meg.

16. Definíció. Az adott x_k alappontokhoz és f_k függvényértékekhez tartozó $\Delta^i f_k$ i -ed rendű véges differenciákat a következő kettős rekurzióval értelmezzük:

- (i) $\Delta^0 f_k \stackrel{\text{def}}{=} f_k$
- (ii) $\Delta^i f_k \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^{i-1} f_{k-1} - \Delta^{i-1} f_k$

17. Lemma. Tetszőleges $i, k \in \mathbb{N}$ -re teljesül

$$\Delta^i f_k = f_{i+k} - \binom{i}{1} f_{i+k-1} + \binom{i}{2} f_{i+k-2} \pm \dots + (-1)^i f_k \quad (6)$$

összefüggés.

18. Bizonyítás. Az állítást i és k szerinti teljes indukcióval igazoljuk, ha $i = 0$, bármely k -ra triviálisan igaz. Tegyük fel, hogy adott i mellett minden k -ra teljesül a Lemma állítása. Írjuk fel $i+1$ -re:

$$\begin{aligned} \Delta^{i+1} f_k &= \Delta^i f_{k+1} - \Delta^i f_k \\ &= f_{i+k+1} - \binom{i}{1} f_{i+k} + \binom{i}{2} f_{i+k-1} \pm \dots + (-1)^i f_{k+1} \\ &\quad - \left(f_{i+k} - \binom{i}{1} f_{i+k-1} + \binom{i}{2} f_{i+k-2} \pm \dots + (-1)^i f_k \right) \\ &= f_{i+k+1} - \left(\binom{i}{0} + \binom{i}{1} \right) f_{i+k} + \left(\binom{i}{1} + \binom{i}{2} \right) f_{i+k-1} \pm \dots + (-1)^{i+1} f_k \\ &= f_{i+k+1} - \binom{i+1}{1} f_{i+k} + \binom{i+1}{2} f_{i+k-1} \pm \dots + (-1)^{i+1} f_k \end{aligned}$$

□

A véges differenciákat az osztott differenciákkal kapcsolják össze a következő formulák:

19. Lemma. Tetszőleges $i, k \in \mathbb{N}$ -re az $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}\}$ ekvidisztáns alappontokhoz tartozó kétféle differencia között fennáll az alábbi összefüggés:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f_i}{h^k k!}.$$

20. Bizonyítás. Most is i és k szerinti indukcióval bizonyítunk. Ha $k = 0$, bármely i -re triviálisan igaz. Tegyük fel, hogy $0, 1, \dots, k$ esetén minden i -re teljesül az állítás. Írjuk fel $k + 1$ -re:

$$\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k+1}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k+1}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]}{x_{i+k+1} - x_i} \\ &= \frac{\frac{\Delta^k f_{i+1}}{h^k k!} - \frac{\Delta^k f_i}{h^k k!}}{x_{i+k+1} - x_i} = \frac{\Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i}{h^k k! (k+1)h} \\ &= \frac{\Delta^k f_i}{h^k k!}, \end{aligned}$$

tehát erre az esetre is beláttuk a bizonyítandó állítást. $\square$

21. Következmény. Ha $f(x) \in \mathbb{C}^n[a, b]$, akkor a képlethibára

$$f(x) - P_n(x_0 + th) = h^n \binom{t}{n} f^{(n)}(\xi)$$

teljesül alkalmas $\xi \in [a, b]$ -vel.

1.4. Hermite interpoláció

HERMITE-INTERPOLÁCIÓS FELADAT:

Adott az $n \geq 1$ természetes szám, a páronként különböző $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alappontok, az $1 \leq m_i$ számok, az $m = \sum_{i=1}^n m_i$ konstans és az egyes x_i alappontokhoz tartozó $\{f_i^0, f_i^1, \dots, f_i^{m_i}\}$ értékek. Határozzuk meg azt a legfeljebb $m - 1$ -ed fokú $H_m(x)$ **Hermite-féle interpolációs polinomot**, amely eleget tesz a

$$H_m^{(j)}(x_i) = f_i^j \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1 \quad (7)$$

interpolációs feltételeknek. Itt $H_m^{(j)}(x_i)$ a $H_m(x)$ polinom j -edik deriváltjának az $x = x_i$ helyen vett helyettesítési értékeit jelöli. Látható, hogy valóban a Lagrange-interpoláció általánosításáról van szó, hiszen a függvényértékeken túl most a közelítő polinom bizonyos deriváltjait is előírtuk. Ha speciálisan $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$, tehát $m = n$, akkor visszkapjuk a Lagrange-interpolációt. Ha $n = 1$, akkor az analízisből ismert (x_1 körüli) Taylor-polinomot adjuk. Ha a polinomot $H_m(x) = \alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \dots + \alpha_m$ alakban keressük, a deriváltakat kiszámolva és a (7)-ben megadott értékeket behelyettesítve az alábbi egyenlőségeket kapjuk:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 x_1^{m-1} + \alpha_1 x_1^{m-2} + \cdots + \alpha_m &= f_1^0 \\
&\vdots \\
\alpha_0 x_n^{m-1} + \alpha_1 x_n^{m-2} + \cdots + \alpha_m &= f_n^0 \\
(m-1)\alpha_0 x_1^{m-2} + (m-2)\alpha_1 x_1^{m-3} + \cdots + \alpha_{m-1} &= f_1^1 \\
&\vdots \\
(m_n-1)\alpha_0^{m-1-(m_n-1)} + \cdots &= f_n^{m-1}
\end{aligned}$$

Ez tekinthető az α_j ismeretlenekre vonatkozó egyenletrendszernek. Vagyis a (7) interpolációs probléma ekvivalens egy

$$\mathbf{H}\alpha = \mathbf{f}$$

alakú $m \times n$ -es lineáris egyenletrendszer megoldásával.

22. Tétel. *Tetszőlegesen megadott (7) feltételrendszerhez legfeljebb egy azt kielégítő $H_m(x)$ Hermite-féle interpolációs polinom létezik.*

23. Bizonyítás. *Indirekt bizonyítunk. Legyen adott egy olyan (7) rendszer, amelyhez létezik két különböző Hermite-polinom, $H_m(x)$ és $\bar{H}_m(x)$. Az $S(x) \stackrel{\text{def}}{=} H_m(x) - \bar{H}_m(x)$ különbségpolinomnak minden x_i alappont zérushelye, hiszen $S(x_i) = H_m(x_i) - \bar{H}_m(x_i) = f_i - f_i = 0$. Sőt, az is következik, hogy az x_i zérushely multiplicitása legalább m_i , ugyanis még a megfelelő deriváltak is eltűnnek:*

$$S^{(j)}(x_i) = H_m^{(j)}(x_i) - \bar{H}_m^{(j)}(x_i) = f_i^j - f_i^j = 0$$

minden $0 \leq j \leq m_i - 1$ -re. $S(x)$ -nek tehát multiplicitással számolva legalább $m = \sum_{i=1}^n m_i$ zérushelye van. Mivel $\partial S \leq m - 1$, ez csak úgy lehetséges, ha $S(x) \equiv 0$, ami ellentmond a $H_m(x) \neq \bar{H}_m(x)$ kiindulási feltételnek. $\square$

Az unicitásból könnyen levezethető a megoldhatóság is.

24. Tétel. *Tetszőlegesen megadott (7) feltételrendszerhez létezik azt kielégítő $H_m(x)$ Hermite-féle interpolációs polinom.*

25. Bizonyítás. *Az unicitástételnek megfelelően a megoldás akkor is egyértelmű, ha olyan (7) rendszert veszünk, amelyhez $\mathbf{H}\alpha = \mathbf{0}$ alakú homogén lineáris egyenletrendszer tartozik. Ilyen esetben $\alpha = 0$ az egyetlen megoldás. De ez pontosan azt jelenti, hogy $\det \mathbf{H} \neq 0$, így viszont a feladat tetszőleges jobboldallal is megoldható. $\square$*

A **Hermit-Fejér interpolációnak** nevezett speciális esetben a függvényérték és az első derivált értéke adott minden pontban ($m = 2n$, $m_i = 2$). Ekkor a Lagrange-interpolációhoz hasonló közvetlen előállítás is lehetséges.

26. Állítás. A $H_{2n}(x)$ Hermite-polinom az $L_i(x)$ Lagrange-féle bázispolinomok segítségével a következő alakban írható fel:

$$H_{2n}(x) = \sum_{i=1}^n f_i^0 \left(1 - 2(x - x_i)L_i'(x) \right) L_i^2(x) + \sum_{i=1}^n f_i^1 (x - x_i)L_i^2(x).$$

$H_{2n}(x)$ -be, illetve differenciálhányadosába behelyettesítve a megadott értékeket könnyen ellenőrizhető a formula helyessége.

Képlethiba Legyen $\bar{x}$ az alappontoktól különböző rögzített érték. Tegyük fel hogy, $f(x)$ m -szer differenciálható azon a legszűkebb $[a, b]$ intervallumon, amely tartalmazza $\bar{x}$ -t és az összes x_i alappontot. Defináljuk $\Omega_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_n)^{m_n}$ 1 főegyütthatós m -ed fokú polinomot és vezessük be a

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - H_m(x) - \frac{\Omega_m(x)}{\Omega_m(\bar{x})} (f(\bar{x}) - H_m(\bar{x}))$$

segédfüggvényt. Ez a $h(x)$ nyilvánvalóan legalább m -szer differenciálható az $[a, b]$ intervallumon, az m -edik deriváltja

$$h^m(x) = f^m(x) - \frac{m!}{\Omega_m(\bar{x})} (f(\bar{x}) - H_m(\bar{x})),$$

azaz van olyan $\zeta \in [a, b]$, amelyben

$$h^m(\zeta) = f^m(\zeta) - \frac{m!}{\Omega_m(\bar{x})} (f(\bar{x}) - H_m(\bar{x})) = 0.$$

ahonnan átrendezéssel a képlethibára a

$$f(\bar{x}) - H_m(\bar{x}) = \frac{\Omega_m(\bar{x})}{m!} f^m(\zeta)$$

formulát kapjuk. Ez az egyenlőség - ζ értékétől függetlenül - igaz az x_i alappontokban is, hiszen ekkor mindkét oldalon 0 áll. Tehát tetszőleges $x \in [a, b]$ -re a képlethiba:

$$f(x) - H_m(x) = \frac{\Omega_m(x)}{m!} f^m(\zeta).$$

Ekkor az abszolút hibára innen az

$$|f(x) - H_m(x)| \leq \frac{|\Omega_m(x)|}{m!} \mu_m$$

felső becslést kapjuk, amelyben μ_m az $|f^{(m)}(x)|$ tetszőleges $[a, b]$ -n vett felső korlátját jelenti. Rögzített $[a, b]$ intervallum és alappontok esetén különböző $x \in [a, b]$ helyeken interpolálva a közelítés maximális hibája:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - H_m(x)| \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |\Omega_m(x)|}{m!} \mu_m.$$

1.5. Diszkrét négyzetes közelítés

Most azzal mérjük a közelítő polinom jóságát, hogy átlagosan milyen jól közelíti a megadott helyeken a megadott függvényértékeket.

- (a) el akarjuk kerülni a magas fokszámú polinomok nemkívánatos oszcillációját
- (b) csökkenteni akarjuk a pontatlanul megadott f_i értékek által okozott hibát
- (c) tudjuk, hogy a közelítendő függvény maga is polinom
- (d) pusztán egyszerűen kezelhető, az adatokat viszonylag jól reprodukáló közelítő függvényt keresünk.

DISZKRÉT NÉGYZETES KÖZELÍTÉS POLINOMOKKAL:

Adott az $n \geq 1$ természetes szám, a páronként különböző $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alappontok és az $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ függvényértékek, továbbá az $1 \leq m \leq n$ szám. Határozzuk meg olyan legfeljebb $m-1$ -ed fokú $q^*(x)$ polinomot, amely eleget tesz a

$$\delta_m^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n |f_i - q(x_i)|^2 \quad (8)$$

minimum-feltételeknek. Tetszőleges $f(x)$ és $g(x)$ függvények belső szorzatát értelmezzük az

$$[f, g] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)$$

formulával. Azaz vegyük a $\varphi(f(x)) \stackrel{\text{def}}{=} (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))^T$ leképezéssel megadott $\mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ homomorfizmust, s a $\mathbb{C}[a, b]$ lineáris tér ennek megfelelő azon $\bar{\mathbb{C}}[a, b]$ faktorstruktúráját, melyben az $f_1(x)$ és $f_2(x)$ függvényeket azonosnak tekintjük, ha $f_1(x_i) = f_2(x_i)$ minden x_i alappontban.

Az $m < n$ feltétel miatt φ megszorítása a legfeljebb $m-1$ -ed fokú polinomok $\mathcal{P}_m$ alterére izomorfizmus lesz, hiszen tetszőleges $p(x) \in \mathcal{P}_m$ polinomot egyértelműen meghatároz az n különböző helyen felvett $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$ értéke. Tehát (8) feladat megoldása ekvivalens $\mathcal{R}^n$ m -dimenziós $\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \varphi(1), \varphi(x), \dots, \varphi(x^{m-1}) \rangle$ alterében a $\varphi(f) = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ vektort legjobban közelítő $\mathbf{q}^*$ elem meghatározásával. ha a keresett polinomot $q^* = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j x^j$ alakban vesszük fel, csupán a normálegyenletet kell felírni:

$$[(f - \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j x^j), x^i] = 0 \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

A belső szorzat disztributivitását felhasználva rendezzük át az egyenleteket:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j [x^j, x^i] = [f, x^i] \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Célszerű bevezetni a $\mu_i \stackrel{\text{def}}{=} [f, x^i]$ és az

$$s_{i+j} \stackrel{\text{def}}{=} [x^j, x^i] = \sum_{k=1}^n (x_k)^j (x_k)^i = \sum_{k=1}^n (x_k)^{i+j}$$

rövid jelöléseket. Ezeket beírva, a következő $m \times m$ -es lineáris egyenletrendszert kaptuk az α_j ismeretlenekre:

$$\begin{aligned} s_0\alpha_0 + s_1\alpha_1 + \cdots + s_{m-1}\alpha_{m-1} &= \mu_0 \\ s_1\alpha_0 + s_2\alpha_1 + \cdots + s_m\alpha_{m-1} &= \mu_1 \\ &\vdots \\ s_{m-1}\alpha_0 + s_m\alpha_1 + \cdots + s_{2m-2}\alpha_{m-1} &= \mu_{m-1} \end{aligned}$$

amelyet **Gauss-féle normálegyenleteknek** neveznek. A tömörebb mátrix alakot használva

$$\mathbf{S}\alpha = \mu$$

ahol $\mathbf{S}$ az s_{i+j} mennyiségekből álló szimmetrikus mátrix. Tudjuk, hogy a keresett $q^*(x)$ közelítés egyértelműen létezik, ezért biztosak lehetünk benne, hogy ez a rendszer egyértelműen megoldható. Az is belátható, hogy $\mathbf{S}$ pozitív definit, így a megoldás kiszámítható például Cholsky-felbontással.

Az igazi megoldást itt is az jelenti, hogy $q^*(x)$ -et nem az $\{1, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$ bázis elemeivel próbáljuk előállítani, hanem először kiszámolunk egy a most bevezetett $[\cdot, \cdot]$ belső szorzatra nézve ortogonális $\{1, g_1(x), g_2(x), \dots, g_{m-1}(x)\}$ polinomrendszert, s az ezekre felírt, a normálegyenleteknek megfelelő diagonális mátrixú egyenletrendszerből határozzuk meg $q^*(x)$ -et.

Az ortogonális polinomok alkalmazásának további előnye, hogy m értékét változtatva, pl. $m + 1$ -re áttérve, az új közelítések a meglevők segítségével könnyen megkaphatók.

$$q_{m+1}^*(x) = q_m^*(x) + \frac{[f, g_m]}{[g_m, g_m]} g_m(x).$$

Hivatkozások

1. Virágh János: *Numerikus matematika*, JATEPress 2000.
2. Móricz Ferenc: *Numerikus Analízis I.* Tankönyvkiadó 1977.
3. Móricz Ferenc: *Numerikus Analízis II.* Tankönyvkiadó 1976.
4. Csentes Tibor: *Közelítő és szimbólikus számítások*, Jegyzet 2005.
5. Sövegjártó András: *Numerikus Analízis II.*, ELTE Jegyzet 2004.