

# Algebra és számelmélet gyakorlat (matematika BSC) 2025/2026 I. félév

2025. Szeptember 24.

## Maradékos osztás

**Tétel** (**A maradékos osztás tétele**) Tetszőleges  $a, b \in \mathbb{Z}$  ( $b \neq 0$ ) esetén léteznek olyan  $q$  és  $r$  egész számok, amelyekre  $a = bq + r$  és  $0 \leq r < |b|$ . Itt  $q$  és  $r$  egyértelműen meghatározottak;  $q$  az osztás hányadosa és  $r$  a maradék.

## Euklideszi algoritmus

Bármely két nullától különböző egész szám legnagyobb közös osztója kiszámítható az ismételt maradékos osztásokra épülő euklideszi algoritmus-sal, és a legnagyobb közös osztó előáll a két szám lineáris kombinációjaként:  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ -hez  $\exists u, v \in \mathbb{Z}$ , hogy

$$au + bv = \text{lko}(a, b)$$

Legyen  $b \neq 0$  és  $b \nmid a$ , ekkor alkalmas  $q_i, r_i$  egészekkel:

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1, & \text{ahol } 0 < r_1 < |b| \\ b = r_1q_2 + r_2, & \text{ahol } 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2q_3 + r_3 & \text{ahol } 0 < r_3 < r_2 \\ \vdots & \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n & \text{ahol } 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0 & \end{array}$$

Az eljárás biztosan befejeződik véges sok lépésben, ugyanis a maradékok nemnegatív egészekből álló szigorúan csökkenő sorozatot alkotnak:

$$|b| > r_1 > r_2 > \dots$$

**Következmény** Ha  $\text{luko}(a, b) \neq 0$ , akkor  $\frac{a}{\text{luko}(a, b)}$  és  $\frac{b}{\text{luko}(a, b)}$  relatív prímek.

**Következmény**(Euklidész lemmája) Ha  $\text{luko}(a, b) \neq 0$ , akkor

$$a \mid bc \iff \frac{a}{\text{luko}(a, b)} \mid c.$$

## Feladatok

1. Határozzuk meg az Euklideszi algoritmussal 112 és 301 legnagyobb közös osztóját! Írjuk föl a legnagyobb közös osztót  $112x + 301y$  alakban, ahol  $x$  és  $y$  egész!
2. Határozzuk meg az Euklideszi algoritmussal 504 és 372 legnagyobb közös osztóját! Írjuk föl a legnagyobb közös osztót  $504x + 372y$  alakban, ahol  $x$  és  $y$  egész!
3. Határozzuk meg az Euklideszi algoritmussal 195 és 159 legnagyobb közös osztóját! Írjuk föl a legnagyobb közös osztót  $195x + 159y$  alakban, ahol  $x$  és  $y$  egész!
4. Euklideszi algoritmussal számítsuk ki a következő számok legnagyobb közös osztóját ( $d$ ), valamint a  $d = ax + by$  lineáris kombinációs előállításához az  $x$  és  $y$  együtthatókat.

- $a = 391$  és  $b = 697$
- $a = 255$  és  $b = 111$

## Diophantoszi egyenlet

**Tétel** Tekintsük az  $ax + by = c$  diophantoszi egyenletet, ahol  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  és  $a, b \neq 0$

- Az egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha  $(a, b) \mid c$

- Ha  $(x_0, y_0)$  egy partikuláris megoldás, akkor az általános megoldás:

$$x_t = x_0 + \frac{b}{(a, b)}t \quad y_t = y_0 - \frac{a}{(a, b)}t$$

### Megoldás lépései:

1. lnko, azaz  $(a, b)$  kiszámítása
2. ha  $(a, b) \nmid c$ , akkor nincs megoldás; ha  $(a, b) \mid c$ , akkor következő lépés:
3. euklideszi algoritmusból:  $au + bv = (a, b)$
4. beszorozzuk azzal, amivel kell:  $ax_0 + by_0 = c$
5. felírjuk az általános megoldás képletét
6. kiválogatjuk a feladat szövegének megfelelő megoldásokat.

### Feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi Diophantosi egyenleteket!
  - a.)  $172x + 62y = 38$
  - b.)  $82x + 22y = 34$
  - c.)  $450x + 86y = 100$
  - d.)  $125x + 45y = -20$
2. Mely egész  $n$ -ekre igaz, hogy  $\frac{n^3+2}{n-1}$  is egész?
3. Legyen  $n$  egy egész szám. Milyen  $n$ -ekre lehet egész számmal egyszerűsíteni a következő törtet:  $\frac{8n+3}{7n+1}, \frac{3n^2+1}{4n^2+3}$ ?
4. Számítsuk ki a következőket:
  - a.)  $\text{LNKO}(3^{15} - 1, 3^9 - 1)$
  - b.)  $\text{LNKO}(\underbrace{9 \dots 9}_{59 \text{ db.}}3, 1\underbrace{0 \dots 0}_{119 \text{ db.}}5)$
5. Határozzuk meg azokat a  $p$  számokat, amelyre  $p, p+2$  és  $p+4$  is prím.
6. Mely  $p$  prímeke lesz  $p^2 + 4$  és  $p^2 + 6$  is prím?

---

Károly Müllner  
Email: [mullni@hotmail.com](mailto:mullni@hotmail.com)  
Web: [mullni.elte.hu](http://mullni.elte.hu)