

Algebra és számelmélet gyakorlat (matematika BSc) 2025/2026 I. félév

2025. Október 1.

1. Polinomok számelmélete, irreducibilitás, racionális gyökteszt

1.1. Tétel (Racionális gyökteszt). $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ egész együtthatós polinom. Ha p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f -nek, akkor $p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját) és $q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját)

1.1. Bizonyítás. $f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + a_2(p/q)^2 + \dots + a_n(p/q)^n = 0$. Beszorozva az egyenletet q^n -nel kapjuk:

$$a_0q^n + a_1(pq^{n-1}) + a_2(pq^{n-2}) + \dots + a_np = 0$$

Mindegyik tag osztható p -vel, kivéve esetleg a legelső tagot. Mivel $p \nmid 0$, ezért a legelső tag is: $p \mid a_0q^n$. A p/q nem egyszerűsíthető, így p és q relatív prímek. Tehát, $p \mid a_0q^n$ -ből $p \mid a_0$ következik. Ugyanezzel a módszerrel kapjuk a $q \mid a_n$ oszthatóságot is.

1. Határozzuk meg az alábbi polinomok gyöktényező alakját a racionális számtest fölött (keressük meg először a racionális gyököket):

a.) $x^3 - 8x + 3$

b.) $3x^3 - 8x^2 + 1$

c.) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$

2. Add meg a $2x^3 + 3x + 5$ polinom racionális gyökeit és bontsd fel $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilisek szorzatára!
3. Mutasd meg, hogy ha egy egész együtthatós polinomnak gyöke az $1 + \sqrt{2}$, akkor az $1 - \sqrt{2}$ is gyöke!
4. Keressünk olyan egész együtthatós irreducibilis polinomokat, amelyek gyöke: $\sqrt{2} + \sqrt{7}$
5. Igazold, hogy egy másod vagy harmadfokú polinom pontosan akkor irreducibilis, ha nincs gyöke!
6. Határozd meg a legfeljebb ötödfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ fölött!

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
<https://mullni.elte.hu>