

Algebra és számelmélet gyakorlat
(matematika BSc)
2025/2026 I. félév

2024. Október 08.

1. Komplex számok II.

1.1. Emlékeztető - Műveletek trigonometrikus alakban

Szorzás/osztás: Legyenek:

$$\begin{aligned}z_1 &= |z_1| \cdot (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \\z_2 &= |z_2| \cdot (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)\end{aligned}$$

Ekkor:

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= |z_1| |z_2| \cdot (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2))\end{aligned}$$

Geometriai jelentés: forgatva-nyújtás!

Hatványozás (Moivre-képlete): Legyen $z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ Ekkor:

$$z^n = |z|^n (\cos(n \cdot \alpha) + i \sin(n \cdot \alpha))$$

Gyökvonás képlet: n db. gyök!

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \right),$$

ahol $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

1.1. Definíció. Az $\varepsilon \in \mathbb{C}$ számot n -edik komplex egységgyöknek nevezzük, ha $\varepsilon^n = 1$. Egy komplex szám egységgyök, ha n -edik egységgyök alkalmas pozitív n egészre.

Például az i szám negyedik egységgyök, hiszen $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i^1 = i, \dots$. Vagyis a hatványok periodikusan ismétlődnek. Ha lerajzoljuk őket, egy négyzetet kapunk, melynek a középpontja az origó, az egységkörbe írható, és az egyik csúcsa az 1.

Az n -edik egységgyököket trigonometrikus alakban keressük. Mivel $\varepsilon^n = 1$ és az abszolút érték szorzattartó, $|\varepsilon|^n = 1$, azaz $|\varepsilon| = 1$. Ha ε szöge α , akkor

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha = \varepsilon^n = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0).$$

1.1. Tétel. Az n -edik egységgyökök száma pontosan n , ezek az

$$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n) = \varepsilon_1^k$$

képlettel definiált $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n = 1$

1.2. Definíció. Az n -ed rendű komplex számokat primitív n -edik komplex egységgyöknek nevezzük. Ezek mind az n -edik egységgyök között vannak. Azok az ε_k számok lesznek primitív n -edik egységgyökök, melyekre $(k, n) = 1$.

1.2. Tétel. Az primitív n -edik egységgyökök pontosan az

$$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$$

alakú számok, ahol k és n relatív prímek és $0 \leq k < n$. Számuk $\varphi(n)$. Egy komplex szám akkor és csak akkor n -edik primitív egységgyök, ha a hatványai pontosan az összes n -edik egységgyök.