

Algebra és számelmélet gyakorlat (matematika BSc) 2025/2026 I. félév

2025. Október 9.

1. Emlékeztető

1.1. Tétel (Euler-Fermat tétel). *Ha $a \in \mathbb{Z}$ és $(a, m) = 1$, akkor*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

1.1. Következmény. *Ha $a \in \mathbb{Z}$ és $(a, m) = 1$, akkor tetszőleges $k, l \in \mathbb{Z}$ kitevők esetén*

$$k \equiv l \pmod{\varphi(m)} \Rightarrow a^k \equiv a^l \pmod{m}$$

1.2. Tétel (Kis Fermat-tétel). *Ha p prímszám, akkor*

- $p \nmid a$ esetén $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
- minden $a \in \mathbb{Z}$ -re $a^p \equiv a \pmod{p}$

2. Feladatok

1. Számítsuk ki $\varphi(n)$ értékét a következő behelyettesítési értékeken: $n = 1, 2, 3, \dots, 12$
2. Bizonyítsuk be, hogy $n^{11} + 10n$ osztható 11-gyel, ha n tetszőleges egész szám!

3. Bizonyítsuk be, hogy ha n tetszőleges egész szám, akkor n^5 és n ugyanarra a számjegyre végződik!
4. Mennyit ad 20-al osztva maradékul 3423^{3423} ?
5. Mennyit ad 11-gyel osztva maradékul 123^{765} ?
6. Mennyit ad 44-gyel osztva maradékul 4447^{2018} ?
7. Milyen maradékot ad 13-mal osztva 42^{600} ?
8. Mi lesz $39^{39^{390}}$ szám utolsó két számjegye?
9. Határozzuk meg a 243^{402} utolsó három jegyét!
10. Mit ad 7-tel osztva maradékul $2^{102} + 3^{201}$?
11. Határozzuk meg 2^{1526} maradékát mod 17
12. Határozzuk meg 7777777^{654321} utolsó két számjegyét.
13. Határozzuk meg 931^{4982} 46-tal vett (legkisebb) maradékát.
14. Bizonyítsuk be, hogy $n^7 - n$ osztható 42-vel, ha n tetszőleges egész szám!
15. Bizonyítsuk be, hogy ha az n egész szám nem osztható 17-tel, akkor $n^8 - 1$ vagy $n^8 + 1$ osztható 17-tel!
16. Egy szigeten 7- és 11-fejű sárkányok élnek. Egy királyfi le akarta győzni az összeset, ezért megszámlolta, hány feje van a sárkányoknak összesen (hogyan tudja, mire vállalkozik).
 - (1) Hány sárkány van, ha 75 fejet számolt?
 - (2) 59 fejet számolt. Igazoljuk, hogy elszámolta.
 - (3) Most számolás előtt levágta az összes sárkánynak 1 – 1 fejét és ezután 40 fejet számolt.

Hány sárkány lehetett összesen?