

Algebra és számelmélet gyakorlat (matematika BSc) 2025/2026 I. félév

2025. Október 09.

1. Euler-féle φ függvény

1.1. Definíció. Tetszőleges n természetes szám esetén $\varphi(n)$ jelöli azt, hogy 1-től n -ig hány olyan szám van, ami relatív prím n -hez:

$$\varphi(n) = |\{a : 1 \leq a \leq n \text{ és } (a, n) = 1\}|$$

Az így kapott $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \rightarrow \varphi(n)$ függvényt Euler-féle φ függvénynek nevezzük.

1.1. Megjegyzés. Nyilván $\varphi(1) = 1$ és $m \geq 2$ esetén $\varphi(m) = |\mathbb{Z}_m^*|$

példa

- $\varphi(29) = |\{1, 2, 3, \dots, 28, \cancel{29}\}|$
- $\varphi(32) = |\{1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \dots, 31, \cancel{32}\}| = 32 - \frac{32}{2} = 32 - 16 = 16$
- $\varphi(81) = |\{1, 2, \cancel{3}, 4, 5, \cancel{6}, 7, \dots, 80, \cancel{81}\}| = 81 - \frac{81}{3} = 81 - 27 = 54$

Megfigyelés

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - \frac{p^\alpha}{p} = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

1.1. példa

Számítsuk ki $\varphi(1000)$ értékét!

$$\varphi(1000) = |\{a : 1 \leq a \leq 1000 \text{ és } 2 \nmid a \text{ és } 5 \nmid a\}| = |\overline{R_1 \cup R_2}|$$

Tehát az R_1 és R_2 uniójának komplementere – az univerzumból azok az elemek, amelyek nem tartoznak sem R_1 -hez, sem R_2 -höz.

szita-formula használata indokolt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\begin{aligned} U &= \{1, 2, 3, \dots, 1000\} & |U| &= 1000 \\ R_1 &= \{a \in U : 2 \mid a\} & |R_1| &= 500 \\ R_2 &= \{a \in U : 5 \mid a\} & |R_2| &= 200 \end{aligned}$$

Tudnunk kell azt is, hogy a metszet milyen számokból áll.

$$R_1 \cap R_2 = \{a \in U : 10 \mid a\} \quad |R_1 \cap R_2| = 100$$

Felírva a szita-formulát, kapjuk:

$$\varphi(1000) = |U| - |R_1| - |R_2| + |R_1 \cap R_2| = 1000 - 500 - 500 + 100 = 400$$

$$= 1000 - \frac{1000}{2} - \frac{1000}{5} + \frac{1000}{2 \cdot 5} = 1000 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

1.2. Általánosan (ha két prímosztója van egy számnak)

Számítsuk ki $\varphi(n)$ értékét, ha $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}!$

$$\begin{array}{ll}
U = \{1, 2, 3, \dots, n\} & |U| = n \\
R_1 = \{a \in U : p_1 \mid a\} & |R_1| = \frac{n}{p_1} \\
R_2 = \{a \in U : p_2 \mid a\} & |R_2| = \frac{n}{p_2} \\
R_1 \cap R_2 = \{a \in U : p_1 p_2 \mid a\} & |R_1 \cap R_2| = \frac{n}{p_1 p_2}
\end{array}$$

Felírva a szita-formulát, kapjuk:

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= |U| - |R_1| - |R_2| + |R_1 \cap R_2| = n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_1 p_2} \\
&= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdot (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1})
\end{aligned}$$

megjegyzés

$$(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1} = \varphi(p_1^{\alpha_1}))$$

$$(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1} = \varphi(p_2^{\alpha_2}))$$

1.3. feladat

Számítsuk ki $\varphi(360)$ értékét!

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
<https://mullni.elte.hu>