

Algebra és számelmélet gyakorlat

(matematika BSc)

2024/2025 I. félév

2025. Október 16.

1. Determinánsok

1.1. Definíció (A 2×2 -es mátrix determinánsa). Ha $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ akkor $\det(M) = ad - bc$ az M determinánsa.

1.1. Lemma. $\det(MN) = \det(M)\det(N)$

1.1. Tétel. Ha $\det(M) = 0$, akkor M -nek nincs inverze.

1.2. Tétel. Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determináns nulla.

1.2. Definíció. Az M felső háromszögmátrix, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad - 0b = ad,$$

azaz felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

1.3. Tétel (Oszlopcsere). A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.

1.4. Tétel (A transzponált mátrix determinánsa). A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.

1.1. Kifejtés

1.3. Definíció. Tekintsünk egy n -edrendű determinánst. Hagyjuk el az i -edik sort és a j -edik oszlopot, így egy $(n-1) \times (n-1)$ -es determináns keletkezik. Az a_{ij} elemhez tartozó A_{ij} előjeles aldeterminánson ennek a determinánsnak a $(-1)^{i+j}$ -szeresét értjük.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ esetén } A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6.$$

Az előjeles aldeterminánsok jelentőségét az ún. kifejtési tétel adja.

1.5. Tétel (Kifejtési tétel). Ha egy sor minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, az így kapott szorzatoknak az összege a determinánssal egyenlők:

$$\det A = \alpha_{i1}A_{i1} + \alpha_{i2}A_{i2} + \dots + \alpha_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}A_{ij}$$

Ezt hívjuk a determináns i -edik sor szerinti kifejtésének. Természetesen hasonló állítás érvényes sorok helyett oszlopokra is.

$$A \ D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ determinánst a második oszlopa szerint kifejtve:}$$

$$D = 2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

adódik.

1.4. Definíció (Vandermonde-determináns). Legyen $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ elemek által generált Vandermonde-determináns

$$V(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_1^2 & \dots & \gamma_1^{n-1} \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_2^2 & \dots & \gamma_2^{n-1} \\ 1 & \gamma_3 & \gamma_3^2 & \dots & \gamma_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \gamma_n & \gamma_n^2 & \dots & \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

A Vandermonde-determináns i -edik sorában tehát rendre γ_i -nek a $0, 1, \dots, n-1$ -edik hatványa áll. Ha két generáló elem azonos, akkor kétegyforma sor van, és így a determináns 0. Az alábbi szorzatalakból kiderül, hogy ennek a megfordítása is igaz.

1.6. Tétel.

$$V(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_1^2 & \dots & \gamma_1^{n-1} \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_2^2 & \dots & \gamma_2^{n-1} \\ 1 & \gamma_3 & \gamma_3^2 & \dots & \gamma_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \gamma_n & \gamma_n^2 & \dots & \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\gamma_j - \gamma_i).$$

Müllner Károly
 Email: mullni@hotmail.com
<https://mullni.web.elte.hu>