

Lagrange-intepoláció

1. feladat – Lagrange-interpolációs polinom

Adott pontok: $(-2, 2), (-1, 3), (0, -1), (1, 2)$.

A Lagrange-bázisfüggvények:

$$\begin{aligned}\ell_1(x) &= \frac{(x+1)x(x-1)}{-6}, & \ell_2(x) &= \frac{(x+2)x(x-1)}{2}, \\ \ell_3(x) &= \frac{-(x+2)(x+1)(x-1)}{2}, & \ell_4(x) &= \frac{(x+2)(x+1)x}{6}.\end{aligned}$$

Az interpolációs polinom:

$$p(x) = 2\ell_1(x) + 3\ell_2(x) - \ell_3(x) + 2\ell_4(x)$$

Egyszerűsítve:

$$p(x) = 2x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 1 = \frac{4x^3 + 7x^2 - 5x - 2}{2}.$$

1. feladat: Interpolációs polinom

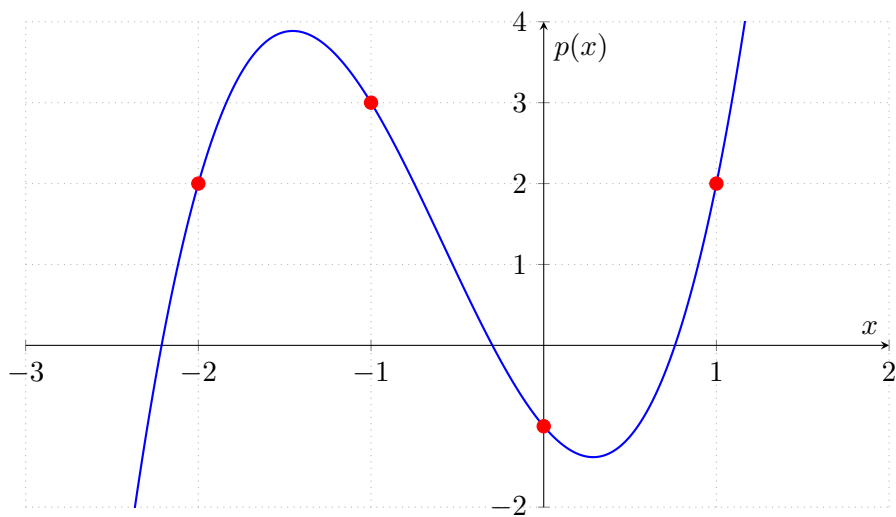


Figure 1: Az 1. feladat interpolációs polinomja és az adott pontok.

2. feladat – Lagrange-interpolációs polinom

Adott pontok: $(-1, 2), (0, 0), (1, 4), (4, 0)$.

A Lagrange-bázisfüggvények:

$$\begin{aligned}\ell_1(x) &= \frac{x(x-1)(x-4)}{-10}, & \ell_2(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{4}, \\ \ell_3(x) &= \frac{(x+1)x(x-4)}{-6}, & \ell_4(x) &= \frac{(x+1)x(x-1)}{60}.\end{aligned}$$

Az interpolációs polinom (mivel $p(0) = p(4) = 0$ csak ℓ_1 és ℓ_3 szerepelnek):

$$p(x) = 2\ell_1(x) + 4\ell_3(x).$$

Egyszerűsítve:

$$p(x) = -\frac{13}{15}x^3 + 3x^2 + \frac{28}{15}x.$$

Ellenőrzés:

$$p(-1) = 2, \quad p(0) = 0, \quad p(1) = 4, \quad p(4) = 0.$$

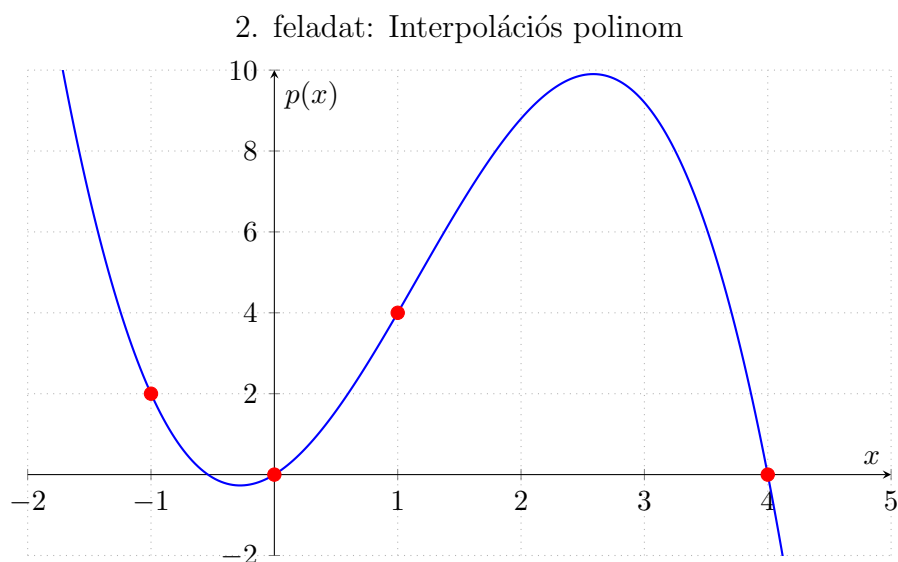


Figure 2: A 2. feladat interpolációs polinomja és az adott pontok.

3. feladat – Házi feladat

Adjunk meg egy példát, ahol négy pont interpolálható egy kisebb fokú polinommal. Legyenek a pontok:

$$(-1, 1), \quad (0, 0), \quad (2, 4), \quad (3, 9).$$

(a) Határozzuk meg a Lagrange-interpolációs polinomot ezekre a pontokra.