

Algebra és számelmélet gyakorlat

(matematika BSc)

2025/2026 I. félév

2025. November 26.

1. Emlékeztető

1.1. Definíció (Permutáció). Legyen X (rendszerint véges) halmaz. Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezzük. Ezek összességét S_X jelöli. S_n az $(1, 2, \dots, n)$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az S_n elemszáma $n!$.

A permutáció jelölése:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

azt jelenti, hogy $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$. Az f függvény a felső sor minden elemét az alatta lévőbe képezi.

1.2. Definíció (Transzpozíció). Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$. Az x és y cseréje az az $f(x, y)$ -nal előlt permutáció, amely az x -et y -ba, az y -t x -be viszi, az X többi elemét pedig fixen hagyja, azaz saját magába képezi. Az ilyen permutációkat cserének vagy transzpozíciónak hívjuk.

1.1. Tétel. Minden permutáció cserék (transzpozíciók) szorzata.

Példa:

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

előállítás cserék szorzataként: $f = (3, 5)(1, 4)(1, 2)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

f többféleképpen is felírható cserék szorzataként:

$f = (1, 2)(2, 4)(3, 5) = (1, 5)(1, 4)(3, 5)(1, 2)(3, 4)$ is igaz.

1.3. Definíció (Inverzió). Legyen $f \in S_n$ egy permtáció és $1 \leq i < j \leq n$. Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak. Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.

Példa:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzió: 21, 43, 41, 53, 51, 31. Nem inverzió: 24, 25, 23, 45. Az inverziók száma tehát: 6.

1.4. Definíció (Permutáció előjele). Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros. Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $sg(f) = 1$. Az f permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan. Ekkor az f előjele -1 . Jelölés: $sg(f) = -1$. Vagyis ha az inverziók száma j , akkor $sg(f) = (-1)^j$.

1.2. Tétel. Ha $n \geq 2$, akkor S_n -ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.

1.5. Definíció (Ciklus). Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \dots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$ és X többi eleme a helyén (fixen) marad. Neve: ciklus, melynek hossza k . Diszjunkt ciklusok: nincs közös elemük.

1.3. Tétel. Ha X véges halmaz, akkor minden S_X -beli permutáció a sorrendtől eltekintve egyértelműen felírható páronként diszjunkt ciklusok szorzataként.

1.1. Következmény. Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. Egy permutáció pontosan akkor páratlan, ha ciklusfelbontásában a páros hosszú ciklusok száma páratlan.