

Lineáris algebra jegyzet

2026. február 23.

1. Definíciók és Alaptételek

1. Definíció. Az $a_1, \dots, a_n \in V$ vektorok által generált altér az a_i vektorok összes lineáris kombinációinak a halmazát értjük, és ezt $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ -nel jelöljük. Azaz:

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in T \}$$

1. Példa. A definíció alapján pl. az egy vektor által generált altér az adott vektor összes skalárszorosaiból áll. A (közönséges háromdimenziós) térben két nem egy egyenesbe eső vektor által generált altér az általuk „kifeszített” sík. Az is nyilvánvaló, hogy az $a_1, \dots, a_n \in V$ vektorok pontosan akkor alkotnak generátorrendszert V -ben, ha $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = V$.

1. Tétel. Az $U = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ az a_i vektorokat tartalmazó legszűkebb altér, azaz

- (i) U altér;
- (ii) $a_i \in U, i = 1, \dots, n$;
- (iii) ha W altér és $a_i \in W, i = 1, \dots, n$, akkor $U \subset W$

Megjegyezzük, hogy szokás a generált altér fogalmát éppen az (i)-(iii) tulajdonságokkal definiálni. Külön kiemeljük, hogy egy altér generátorrendszere mindig magának az altérnek az elemeiből kell, hogy álljon, „külső” elemek nem jöhetnek szóba.

2. Tétel. I. Ha egy (legalább kételemű) lineárisan független rendszerből egy tetszőleges elemet elhagyunk, akkor a maradék vektorok is lineárisan független rendszert alkotnak.

II. Ha egy lineárisan összefüggő rendszerhez egy tetszőleges vektort hozzáveszünk, akkor az így kapott vektorrendszer is lineárisan összefüggő.

III. Egy legalább kételemű vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha van benne (legalább egy) olyan vektor, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.

IV. Ha $\{v_1, \dots, v_k\}$ lineárisan független, de az a vektor hozzávételével kapott rendszer lineárisan összefüggő, akkor a előáll a v_i vektorok lineáris kombinációjaként.

V. Tegyük fel, hogy valamely vektor előáll $v_1, \dots, v_k$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ez az előállítás akkor és csak akkor egyértelmű, ha $v_1, \dots, v_k$ lineárisan független.

2. Definíció. Bázison lineárisan független generátorrendszert értünk.

3. Tétel. Egy $u_1, u_2, \dots, u_m$ vektorrendszer akkor és csak akkor bázis, ha a vektortér minden eleme egyértelműen előáll az $u_1, u_2, \dots, u_m$ vektorok lineáris kombinációjaként.

2. Példa. T^n -ben, illetve $T^{k \times n}$ -ben bázist alkotnak azok a vektorok, illetve mátrixok, amelyeknek egyetlen eleme 1, a többi 0. Természetesen egy vektortérnek általában nagyon sok bázisa van. A közönséges háromdimenziós térben bármely három, nem egy síkba eső vektor bázist alkot.

4. Tétel. Egy vektortérben bármely két bázis azonos elemszámú.

5. Tétel. Egy $V \neq 0$ vektortér bármely (véges) generátorrendszere tartalmaz bázist.

6. Tétel. Ha egy V vektortérnek van (véges) generátorrendszere, akkor bármely lineárisan független rendszer kiegészíthető bázissá.

3. Definíció. Egy V vektortér dimenzióján egy bázisának elemszámát értjük. Ha a vektortérnek nincs véges generátorrendszere, akkor a dimenziója végtelen. Végül a 0 tér dimenziója 0.

A V vektortér dimenzióját $\dim V$ -vel jelöljük. ... valamennyi bázisnak ugyanaz az elemszáma és így a dimenzió nem függ a bázis választásától.

Példák: a „közönséges háromdimenziós tér” dimenziója valóban 3, T^n -é n , T^{kn} -é kn . A T feletti polinomok szokásos vektortere végtelen dimenziós, ebben a legfeljebb r -edfokú polinomok $r+1$ -dimenziós alteret alkotnak.

7. Tétel. Legyen $V \neq 0$ vektortér és n pozitív egész. Ekkor az alábbi feltételek ekvivalensek:

- (i) $\dim V = n$;
- (ii) V -ben található n független vektor, de bármely $n+1$ vektor összefügg;
- (iii) V -ben található n elemű generátorrendszer, de $n-1$ elemű nem.

8. Tétel. Legyen n pozitív egész és $\dim V = n$. Ekkor V -ben bármely n elemű független rendszer bázist alkot. Ugyanez áll bármely n elemű generátorrendszerre is.

9. Tétel. I. Legyen W altér V -ben. Ekkor $\dim W \leq \dim V$.

II. Ha V véges dimenziós, W altér V -ben és $\dim W = \dim V$, akkor $W = V$.

10. Tétel. Az $a_1, \dots, a_n$ vektorok által generált $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ altér dimenziója az $a_1, \dots, a_n$ vektorrendszer rangja.

11. Tétel. Egy lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával.

2. Koordináták

4. Definíció. Legyen $b_1, \dots, b_n$ egy rögzített bázis a V vektortérben. Ekkor minden $v \in V$ vektor egyértelműen írható fel $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ alakban. Az α_i skalárokat a v vektornak a $b_1, \dots, b_n$ bázis szerinti koordinátáinak nevezzük.

Megjegyzés. Ha a közönséges háromdimenziós térben a szokásos merőleges egységvektorok alkotta bázist vesszük, akkor a koordináták éppen a szokásos koordináták lesznek... [stb. az izomorfizmusig]

3. Bázis-e a megadott vektorrendszer?

3.1. Feladat. Döntse el, hogy az $V = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$ halmaz bázist alkot-e $\mathbb{R}^3$ -ban!

Megoldás. Egy n elemű vektorrendszer $\mathbb{R}^n$ -ben akkor bázis, ha a belőlük alkotott mátrix determinánsa nem nulla. Vizsgáljuk meg a fenti vektorokból álló mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Látható, hogy a második sor az első sor kétszerese ($s_2 = 2s_1$). Ha egy mátrix sorai lineárisan összefüggőek, akkor a determinánsa 0:

$$\det(A) = 0$$

Mivel a vektorok lineárisan összefüggőek, nem alkothatnak bázist $\mathbb{R}^3$ -ban. Geometriailag a három vektor egy közös síkba esik. $\square$

3.2. Feladat. Döntse el, hogy a $B = \{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (3, 2, 1)\}$ halmaz bázist alkot-e $\mathbb{R}^3$ -ban!

Megoldás. Alakítsunk mátrixot a vektorokból és számítsuk ki a determinánsát a második sor szerinti kifejtéssel:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1 - 9) = -8$$

Mivel a determináns nem nulla ($\det \neq 0$), a vektorrendszer lineárisan független. Mivel a rendszer elemszáma megegyezik a tér dimenziójával ($\dim(\mathbb{R}^3) = 3$), a halmaz **bázist alkot**. $\square$

3.3. Feladat. Döntse el, hogy a $C = \{(1, 1, 1), (1, 2, 4), (1, 3, 9)\}$ halmaz bázist alkot-e $\mathbb{R}^3$ -ban!

Megoldás. A vektorokból alkotott mátrix egy speciális, úgynevezett Vandermonde-mátrix:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

A determináns kiszámításához végezzünk sorműveleteket:

$$\det(V) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot (8 - 6) = 2$$

Mivel $\det(V) = 2 \neq 0$, a vektorrendszer lineárisan független, így **bázist alkot**. Általánosan egy $n \times n$ -es Vandermonde-mátrix determinánsa $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$, ami jelen esetben $(2-1)(3-1)(3-2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$. $\square$

3.4. Feladat. Döntse el, hogy a $D = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$ halmaz bázist alkot-e $\mathbb{R}^3$ -ban!

Megoldás. Vizsgáljuk meg a vektorok lineáris függetlenségét! Vegyük észre, hogy:

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = (3, 3, 3) \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 = (3, 3, 3)$$

Ebből következik, hogy $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, tehát a harmadik vektor lineárisan kifejezhető az első kettő segítségével.

Alternatív megoldás determinánssal:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_2-s_1, s_3-s_2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

Mivel a determináns 0, a vektorrendszer lineárisan összefüggő, így **nem alkot bázist** $\mathbb{R}^3$ -ban. $\square$

4. Mik $(1; 0; 0)$ koordinátái az előző bázisokban?

Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$ vektor koordinátáit keressük az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ oszlopvektorként, melyre $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, ahol A a bázisvektorokból álló mátrix.

4.1. Megoldás a (b) bázisra

A bővített mátrix alakja és a sorműveletek:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{S_2-2S_1 \\ S_3-3S_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \end{array} \right]$$

A kapott lépcsős alakból a visszahelyettesítés:

$$1. \quad -8x_3 = -3 \implies x_3 = \frac{3}{8}$$

$$2. \quad x_2 - 4\left(\frac{3}{8}\right) = -2 \implies x_2 - \frac{3}{2} = -2 \implies x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$3. \quad x_1 + 3\left(\frac{3}{8}\right) = 1 \implies x_1 = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}$$

Tehát $[\mathbf{e}_1]_B = \left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)^T$.

4.2. Megoldás a (c) bázisra

A bővített mátrix sorműveletei:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[S_3-S_1]{S_2-S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 8 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{S_3-3S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

A visszahelyettesítés lépései:

1. $2x_3 = 2 \implies x_3 = 1$
2. $x_2 + 2(1) = -1 \implies x_2 = -3$
3. $x_1 + (-3) + 1 = 1 \implies x_1 = 3$

Tehát $[\mathbf{e}_1]_C = (3, -3, 1)^T$.

5. Feladat kidolgozása - Elemi bázistranszformáció

Határozzuk meg az R^4 vektortér V alterének dimenzióját, valamint adjunk meg benne bázist.

(a) $V = \langle (1, -1, 1, 2), (1, 2, 1, 2), (-1, 0, 1, -2), (1, 3, 5, 2) \rangle$

Bázis	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	1	1	-1	1
e_2	-1	2	0	3
e_3	$\mathbf{1}^*$	1	1	5
e_4	2	2	-2	2

e_1	0	0	-2	-4
e_2	0	3	1	8
v_1	1	1	1	5
e_4	0	0	-4	-8

Számítási részletek a téglalap-szabályhoz ($a_{new} = a - \frac{b \cdot c}{gen}$):

e_1 sorában v_4 értéke: $1 - \frac{1 \cdot 5}{1} = -4$

e_2 sorában v_4 értéke: $3 - \frac{-1 \cdot 5}{1} = 8$ (ha a generáló elem feletti -1-gyel számolunk az eredeti táblázatból).

Végső táblázat (átrendezve):

Bázis	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	0	0	1
v_2	0	1	0	2
v_3	0	0	1	2
e_4	0	0	0	0

Eredmény: A dimenzió $r = 3$, bázis $\{v_1, v_2, v_3\}$.