

Lineáris algebra feladatsor: Vektorrendszerek

Matematikai összefoglaló

2026. február

1. Elméleti alapfogalmak

1. Definíció (Generátorrendszer). Egy vektorrendszert **generátorrendszernek** nevezzük $\mathbb{R}^n$ -ben, ha a tér minden vektora előállítható a rendszer elemeinek lineáris kombinációjaként. *Példa:* A $\{(1, -1), (4, 5), (1, 0)\}$ rendszer generátorrendszer $\mathbb{R}^2$ -ben, mert tetszőleges (a, b) vektor előáll az alábbi módon:

$$(-b) \cdot (1, -1) + 0 \cdot (4, 5) + (a + b) \cdot (1, 0) = (a, b)$$

2. Definíció (Bázis). Egy vektorrendszer **bázis** $\mathbb{R}^n$ -ben, ha lineárisan független és generátorrendszer. Ez azt jelenti, hogy a tér minden vektora **pontosan egyféleképpen** állítható elő a bázisvektorok lineáris kombinációjaként.

1.1. Generátorrendszerség

Egy vektorrendszerre igaz, hogy:

- Ha az elemszáma kisebb a dimenziószámánál ($k < n$), akkor **nem** generátorrendszer.
- Ha két dimenzióban ($n = 2$) tartalmaz két nem arányos vektort, akkor generátorrendszer.
- Ha az elemszáma megegyezik a dimenziószámával ($k = n$) és lineárisan függő, akkor **nem** generátorrendszer.

1. Megjegyzés. Ha az elemi szabályok nem döntenek, itt is eliminációs eljárást kell alkalmazni.

2. Feladatok

1. Feladat. A rang meghatározása nélkül döntsük el, hogy az alábbi vektorrendszerek lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e az adott vektortérben!

Megoldás. Az elméleti összefoglaló szabályait alkalmazva:

- (a) $(1, 2, -3), V = \mathbb{R}^3$

Függetlenség: Független, mert csak egyetlen nem-nulla vektorból áll.

Generátorrendszer: Nem, mert az elemszáma ($k = 1$) kisebb, mint a dimenzió ($n = 3$).

Bázis: Nem (mivel nem generátorrendszer).

- (b) $(1, -1, 1), (0, 0, 0), V = \mathbb{R}^3$

Függetlenség: Függő, mert tartalmazza a nullvektort.

Generátorrendszer: Nem, mert az elemszáma ($k = 2$) kisebb, mint a dimenzió ($n = 3$).

Bázis: Nem.

- (c) $(2, 4, -2), (3, 6, -3), V = \mathbb{R}^3$

Függetlenség: Függő, mert a két vektor arányos: $\frac{3}{2} \cdot (2, 4, -2) = (3, 6, -3)$.

Generátorrendszer: Nem, mert az elemszáma ($k = 2 < n = 3$).

Bázis: Nem.

- (d) $(1, 1, 2), (1, 1, 3), V = \mathbb{R}^3$

Függetlenség: Független, mert két vektorból áll, egyik sem nullvektor, és nem arányosak (a harmadik koordináta aránya $2/3$, de az első kettőé $1/1$).

Generátorrendszer: Nem, mert az elemszáma ($k = 2 < n = 3$).

Bázis: Nem.

- (e) $(1, 2), (1, 3), V = \mathbb{R}^2$

Függetlenség: Független, mert két nem nullvektor, és nem arányosak.

Generátorrendszer: Igen, mert $n = 2$ dimenzióban tartalmaz két független vektort.

Bázis: Igen, mert független generátorrendszer (vagy: független és az elemszáma megegyezik a dimenzióval).

□

Az alábbi táblázat összefoglalja a vizsgált vektorrendszerek tulajdonságait:

Vektorrendszer	Lin. független	Generátorrendszer	Bázis
(a) $(1, 2, -3)$	igen	nem	nem
(b) $(1, -1, 1), (0, 0, 0)$	nem	nem	nem
(c) $(2, 4, -2), (3, 6, -3)$	nem	nem	nem
(d) $(1, 1, 2), (1, 1, 3)$	igen	nem	nem
(e) $(1, 2), (1, 3)$	igen	igen	igen

1. táblázat. A feladatok eredményeinek összefoglalása

2. Megjegyzés. Megfigyelhető, hogy egy vektorrendszer csak akkor bázis, ha **egyszerre** lineárisan független és generátorrendszer. Az (a)–(d) esetekben a vektorok száma kevesebb volt, mint a tér dimenziója, ezért ott a generátorrendszerség eleve nem teljesülhetett.

3. Feladatléírás

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját (r), és döntsük el, hogy lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben ($n = 4$).

- (a) $v_1 = (1, -1, 1, 2), v_2 = (1, 2, 1, 2), v_3 = (-1, 0, 1, -2), v_4 = (1, 3, 5, 2)$
 - (b) $v_1 = (1, -1, 2, -1), v_2 = (2, 2, 1, 0), v_3 = (3, 1, 3, -1), v_4 = (1, 7, -4, 3)$
 - (c) $v_1 = (1, -1, 2, 1), v_2 = (1, 0, 1, 2), v_3 = (-1, 2, -3, 1)$
 - (d) $v_1 = (1, -1, 2, 1), v_2 = (1, 0, 1, 2), v_3 = (-1, 2, -3, 0)$
 - (e) $v_1 = (1, 1, -1, 2), v_2 = (1, 1, 0, 1), v_3 = (1, 2, -1, 2), v_4 = (1, 0, 1, 0), v_5 = (1, 2, 3, 4)$
 - (f) $v_1 = (1, 1, -1, 2), v_2 = (1, 1, 0, 1), v_3 = (-1, 2, 1, 1), v_4 = (0, 3, -1, 4), v_5 = (1, 4, 0, 4)$
 - (g) $v_1 = (-1, 3, 1, 2), v_2 = (-8, 3, 1, -2), v_3 = (2, 6, 2, 11), v_4 = (-2, 3, 1, 1)$
 - (h) $v_1 = (5, -2, -8, 4), v_2 = (3, 1, 1, -2), v_3 = (6, 1, -1, -4), v_4 = (3, 3, 7, 1)$
-

4. Megoldások

Megoldás. A vektorokat sorvektorként mátrixba rendezzük és elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk.

(a) feladat

Az eliminációt két lépcsőben végezzük, hogy a mátrixok elférjenek a lapon:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2-S_1 \\ S_3+S_1 \\ S_4-S_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Most felcseréljük a második és harmadik sort, majd elvégezzük az utolsó simításokat:

$$\xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{S_3+3S_2 \\ S_4+4S_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_4-2S_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A nem-nulla sorok száma 3, tehát **Rang: 3**.

(b) feladat

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2-2S_1 \\ S_3-3S_1 \\ S_4-S_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{S_3-S_2 \\ S_4-2S_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A nem-nulla sorok száma 2, tehát **Rang: 2**.

(c) feladat

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+S_1]{S_2-S_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A nem-nulla sorok száma 3, tehát **Rang: 3**.

(d) feladat

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+S_1]{S_2-S_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A nem-nulla sorok száma 2, tehát **Rang: 2**.

(e) feladat

Mivel 5 vektor van $\mathbb{R}^4$ -ben, a rendszer biztosan lineárisan függő ($k > n$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{elimináció}} \dots \xrightarrow{\text{lépcsős alak}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang: 4.

(f) feladat

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_5-S_1]{S_2-S_1, S_3+S_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rendezve}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

Az utolsó három sor arányos, kettő kiesik. **Rang: 3**.

(g) feladat

A vektorrendszer: $(-1, 3, 1, 2), (-8, 3, 1, -2), (2, 6, 2, 11), (-2, 3, 1, 1)$.

Első lépésben kinullázzuk az első oszlopot:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -8 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 2 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-2S_1]{S_2-8S_1, S_3+2S_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -21 & -7 & -18 \\ 0 & 12 & 4 & 15 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

A számolás megkönnyítéséhez felcseréljük a második és a negyedik sort, majd folytatjuk az eliminációt:

$$\xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 12 & 4 & 15 \\ 0 & -21 & -7 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-7S_2]{S_3+4S_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Végül az utolsó sorból kivonjuk a harmadikat:

$$\xrightarrow{S_4 - S_3} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A nem-nulla sorok száma 3, tehát **Rang: 3**. Mivel $r < k$ és $r < n$, a rendszer lineárisan függő és nem generátorrendszer.

(h) feladat

A vektorrendszer: $(5, -2, -8, 4), (3, 1, 1, -2), (6, 1, -1, -4), (3, 3, 7, 1)$.

A számolást a második vektorral kezdjük a könnyebb oszthatóság miatt:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & -8 & 4 \\ 6 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} S_2 - \frac{5}{3}S_1 \\ S_3 - 2S_1 \\ S_4 - S_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{29}{3} & \frac{22}{3} \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

A törtek kiküszöbölése és a második oszlop eliminálása után:

$$\xrightarrow{\text{rendezés}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 11 & 29 & -22 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} S_3 + 11S_2 \\ S_4 + 2S_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Mivel négy nem-nulla sort kaptunk, a **Rang: 4**. A vektorrendszer tehát lineárisan független, generátorrendszer, így **bázis** $\mathbb{R}^4$ -ben.

□

5. Összefoglaló táblázat

A rangvizsgálatok és a részletes Gauss-eliminációk alapján az alábbi összesített eredményeket kaptuk. Fontos megjegyezni, hogy $\mathbb{R}^4$ -ben egy vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha a rangja $r = 4$ és a vektorok száma is $k = 4$.

3. Megjegyzés. A (h) feladat esetében a részletes elimináció megmutatta, hogy bár az együtthatók bonyolultak, a negyedik oszlopban maradó elem megakadályozza a sorok kiesését, így a rendszer teljes rangú. Ezzel szemben az (a) és (g) feladatoknál a látszólagos függetlenség ellenére egy-egy sor nullává vált az eljárás végén.

6. Elemi bázistranszformáció (EBT) alkalmazása

Az EBT során a célunk az, hogy a standard bázisvektorokat (e_1, e_2, e_3, e_4) kicseréljük a megadott vektorrendszer elemeire (v_1, v_2, v_3, v_4) .

Feladat	Vektorok (k)	Rang (r)	Lin. független	Gen. r.	Bázis
(a)	4	3	nem	nem	nem
(b)	4	2	nem	nem	nem
(c)	3	3	igen	nem	nem
(d)	3	2	nem	nem	nem
(e)	5	4	nem	igen	nem
(f)	5	3	nem	nem	nem
(g)	4	3	nem	nem	nem
(h)	4	4	igen	igen	igen

2. táblázat. A vektorrendszerek tulajdonságainak összefoglalása $\mathbb{R}^4$ -ben

Bázis	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	1*	1	-1	1
e_2	-1	2	0	3
e_3	1	1	1	5
e_4	2	2	-2	2

(a) feladat részletes levezetése

1. lépés: Induló táblázat. A bázisban a standard egységvektorok szerepelnek. Kiválasztjuk generáló elemnek v_1 első koordinátáját (1), amit *-gal jelölünk.

2. lépés: v_1 bevitele a bázisba e_1 helyére. A generáló elem sorát osztjuk 1-gyel, az oszlopában a többi elem 0 lesz. A többi elemet a téglalap-szabály ($a_{new} = a - \frac{b \cdot c}{gen}$) segítségével számoljuk ki. Generáló elemnek a v_2 oszlopában lévő 3-at választjuk.

Bázis	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	1	-1	1
e_2	0	3*	-1	4
e_3	0	0	2	4
e_4	0	0	0	0

3. lépés: v_2 bevitele a bázisba e_2 helyére. Látjuk, hogy az utolsó sor (e_4) már most kinullázódott a v vektorok alatt. Folytatjuk a bevitt v_3 -mal a harmadik sorban lévő 2-est választva.

Bázis	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	0	-2/3	-1/3
v_2	0	1	-1/3	4/3
e_3	0	0	2*	4
e_4	0	0	0	0

4. lépés: v_3 bevitele a bázisba e_3 helyére.

Következtetés: A bázisba csak 3 vektort tudtunk bevinni (v_1, v_2, v_3). A v_4 oszlopa az utolsó táblázatban megmutatja, hogy v_4 hogyan áll elő a bázisba vitt vektorok lineáris kombinációjaként:

$$v_4 = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3$$

Bázis	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	0	0	1
v_2	0	1	0	2
v_3	0	0	1	2
e_4	0	0	0	0

Eredmény: A rang $r = 3$, a rendszer lineárisan függő.