

Lineáris Algebra Összefoglaló

Vektorterek, Altérak és Lineáris Függelenség

1. Vektortér és Altér

1.1. Definíció (Vektortér). Legyen K egy test. A V halmazt a K feletti **vektortérnek** nevezzük, ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra, valamint teljesülnek rá a vektortér-axiómák (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás, zéruselem és ellentett létezése).

1.2. Definíció (Altér). A V vektortér $U \subseteq V$ nemüres részhalmazát **altérnek** nevezzük, ha U maga is vektortér a V -beli műveletekre nézve.

1.1. Tétel (Altér kritérium). $U \subseteq V$ akkor és csak akkor altér, ha:

1. $\mathbf{0} \in U$.
2. $u, v \in U \implies u + v \in U$.
3. $\lambda \in K, u \in U \implies \lambda u \in U$.

2. Lineáris függetlenség és összefüggőség

2.1. Definíció. A $\{v_1, \dots, v_k\}$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha a $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}$ egyenletnek csak a triviális ($\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$) megoldása létezik. Ha létezik nemtriviális megoldás, a rendszer **lineárisan összefüggő**.

2.1. Példák vizsgálata

2.1. Példa (Lineáris összefüggőség). Tekintsük az alábbi vektorokat $\mathbb{R}^3$ -ben:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy $u_1 + u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot u_3$. Mivel $u_1 + u_2 - 3u_3 = \mathbf{0}$ nemtriviális lineáris kombinációt ad, a rendszer **lineárisan összefüggő**.

2.2. Példa (Lineáris függetlenség vizsgálata Gauss-kiküszöböléssel). Vizsgáljuk meg az u_1, u_2 és az alábbi u_4 vektor függetlenségét:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel a vektorokat egy mátrix oszlopaivá, és hozzuk lépcsős alakra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-2S_1, S_3-S_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Következtetés: A Gauss-kiküszöböléssel kapott felső háromszögmátrixban nincs csupa nulla sor, a "lépcsők" száma megegyezik a vektorok számával. Ebből adódik, hogy a homogén egyenletrendszernek csak a triviális megoldása van (azaz CSAK $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$ lehetséges), így a vektorok **valóban függetlenek**.

2.1. Megjegyzés. Geometriailag a lineáris függetlenség azt jelenti $\mathbb{R}^3$ -ben, hogy a három vektor nem esik egy síkba, így kifeszítik a teljes teret.

3. Generátorrendszer és Kifeszített altér

3.1. Definíció (Lineáris kombináció). A $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ vektorok $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in K$ skalárokkal vett összege a $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ vektor, amit a rendszer **lineáris kombinációjának** nevezünk.

3.2. Definíció (Generátorrendszer). A $G \subseteq V$ vektorrendszert a V vektortér **generátorrendszerének** nevezzük, ha V minden eleme előáll G -beli vektorok lineáris kombinációjaként. Jelölése: $V = \text{span}(G)$ vagy $V = [G]$.

4. A Bázis fogalma

A bázis a "legtakarékosabb" generátorrendszer, illetve a "legnagyobb" független rendszer.

4.1. Definíció (Bázis). A $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vektorrendszert a V vektortér **bázisának** nevezzük, ha:

1. B lineárisan független,
2. B generátorrendszer V -ben.

4.1. Tétel. Ha B bázis V -ben, akkor V minden vektora **egyértelműen** írható fel B elemeinek lineáris kombinációjaként. Ezen lineáris kombináció együtthatóit nevezzük a vektor bázisra vonatkozó **koordinátáinak**.

5. Dimenzió

5.1. Tétel. Egy vektortérben minden bázis ugyanannyi elemet tartalmaz.

5.1. Definíció (Dimenzió). A V vektortér **dimenziója** a bázisában lévő vektorok száma. Jelölése: $\dim(V)$.

5.1. Példa. • $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ (Standard bázis: $e_1, \dots, e_n$).

- $\dim(P_n[x]) = n + 1$ (Bázis: $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$).
- $\dim(\mathbb{C})$ mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér $= 2$ (Bázis: $\{1, i\}$).

6. Összefüggés a ranggal

6.1. Definíció (Vektorrendszer rangja). Egy vektorrendszer **rangja** az általa kifeszített altér dimenziója, ami megegyezik a rendszerből kiválasztható lineárisan független vektorok maximális számával.

6.1. Megjegyzés. A Gauss-elimináció során a lépcsős alakban kapott nem-nulla sorok száma pontosan a vektorrendszer rangját adja meg.