

Lineáris algebra feladatsor

Vektorterek és lineáris függetlenség

1. Lineárisan függetlenek-e (külön-külön) az alábbi mátrixok oszlop-, illetve sorvektorai? Mindegyik mátrixban adjunk meg annyi lineárisan független oszlopot, ahányat csak lehet, az összes lehetséges módon.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

2. Igazoljuk az alábbiakat!

- (a) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.
(b) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$. Mikor lesz független $\{v, w\}$?
(c) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}$ is független. Általánosítsuk az állítást és vonjunk párhuzamot a determinánsokkal!

3. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?

- (a) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben:

- i. $\{1, x, x^2\}$
ii. $\{x, 2x, x^2, x^3\}$
iii. $\{1 + x, 1 + 2x, 1 + 3x\}$
iv. $\{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$

- (b) Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben tetszőleges három komplex szám.

- (c) A $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{R}$ vektortérben: $\{\lg 2, \lg 3, \lg 6\}$ és $\{\lg 2, \lg 3, \lg 5\}$.

4. Döntsük el, hogy az alábbi halmazok alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ben!

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$

5. Lineárisan függetlenek-e az alábbi polinomok $P_2[x]$ -ben?

$$p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = x + x^2, \quad p_3(x) = 1 + x^2$$

6. **Bónusz:** Bizonyítsa be, hogy ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ lineárisan független, akkor a $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ rendszer is lineárisan független!

7. Döntsük el, hogy az alábbi vektorrendszerek bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ben! Ha nem, határozzuk meg az általuk kifeszített altér dimenzióját!

(a) $v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (2, 1, 2), \quad v_3 = (1, 1, 1)$

(b) $u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (1, 1, 0), \quad u_4 = (1, 1, 1)$

(c) $w_1 = (1, 2, 3), \quad w_2 = (2, 4, 6)$

8. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját Gauss-eliminációval!

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Igazoljuk, hogy páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független!