

Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

4. Házi feladat - 2026.03.02.

Határidő: 2026.03.09. 8:00

1. Adjuk meg a v vektor koordinátasorát a megadott bázisban. (2 pont)

$$v = (2, 1, -1), \quad \text{bázis: } (-4, -2, 2), (1, 2, 4), (-1, 3, 9)$$

2. Az elemi bázistranszformáció segítségével, döntsük el, hogy a $\mathbb{R}^4$ vektortérben lineárisan független-e az alábbi vektorrendszer, továbbá mennyi a rangja, generátorendszert alkotnak-e, esetleg bázist is? (2 pont)

$$(1, 1, -1, 2); (1, 1, 0, 1); (-1, 2, 1, 1); (0, 3, -1, 4)$$

3. Hány dimenziós alteret alkotnak $\mathbb{R}$ fölött azok a legfeljebb negyedfokú, valós együtthatós polinomok, melyeknek gyöke az -1 ? (3 pont).

Írjuk fel

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$$

polinomot a ezen bázisok segítségével!

4. Határozzuk meg az alábbi vektortér dimenzióját, és adjunk meg egy bázist. (3p)

A legfeljebb n -edfokú $\mathbb{C}$ feletti polinomok $\mathbb{R}$ felett. Mi általában az összefüggés egy vektortér $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti dimenziója között?

5. Bizonyítsa be, hogy az alábbi tételt! (4 pont)

Tétel.

I. $\mathcal{A}\underline{0}_1 = \underline{0}_2$, ahol a $\underline{0}_i$ a V_i vektortér nulleleme.

II. $\mathcal{A}(-u) = -(\mathcal{A}u)$.

III. $\mathcal{A}(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 \mathcal{A}u_1 + \dots + \lambda_k \mathcal{A}u_k$.

6. Lineáris leképezések-e az alábbi hozzárendelések? (3 pont)

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $\mathcal{A}(v)$ a v komponenseinek a szorzata.

(b) $V = W = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ az $\mathbb{R}$ felett, $\mathcal{A}(M) = M^2$, illetve az $\mathcal{A}(M) = iM$.