

Koordinátarendszerek és Bázisok

Egy koordinátarendszer azt teszi lehetővé, hogy általános vektorok (pontok, polinomok) helyett oszlopvektorokkal számoljunk. A félév egyik fő célja az, hogy megtanuljuk, hogyan választható egy-egy feladathoz alkalmas koordinátarendszer.

A koordinátarendszer tengelyeit egy-egy vektorral adjuk meg, legyenek ezek $b_1, \dots, b_n$. (Egyelőre sem a távolság, sem a szög fogalmát nem értelmezzük.) Azt szeretnénk, hogy minden v vektor egyértelműen felírható legyen $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ alakban alkalmas skalárok segítségével.

Az ilyen $b = (b_1, \dots, b_n)$ vektorrendszereket **bázisnak** nevezzük. Ekkor

$$[v]_b = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

a v koordinátavektora a b bázisban (helyspórolás végett $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$ alakban írhatjuk).

A bázisvektorok sorrendje fontos: ha cserélgetjük őket, akkor a koordináták is cserélődnek.

Az egyértelműség akkor teljesül, ha $b_1, \dots, b_n$ független, a felírhatóság pedig akkor, ha generálja az egész vektorteret, azaz generátorrendszer. Sok bázis van, de ezek mind ugyanannyi vektorból állnak, ez a vektortér dimenziója. Fontos, hogy a dimenziót intuitíven le tudjuk olvasni, mielőtt bázist kezdenének keresni. Ebben segítenek a következő példák.

Ha egy autópályán haladunk, és valaki telefonon megkérdezi, hogy hol járunk, akkor elég annyit mondani neki, hogy az M7-esen a 90-es kilométerkőnél. Ha egy hegységben bolyongunk, akkor már két számot kell megtelefonálni: a GPS-koordinátákat. Ha pedig helikopteren ülünk, akkor még a magasságot is. Vagyis az autópályán egy szám jelöli ki a helyzetünket, a föld felszínén két szám, a térben pedig három szám. Ezért az autópálya egydimenziós, a felszín pedig kétdimenziós. Vagyis ha a partnerünk is ismeri a vektorteret, amiben dolgozunk, akkor a dimenzió azt jelenti, hogy hány számot kell megtelefonálni neki, hogy ki tudja találni azt a konkrét vektort, amire gondolunk. Fontos hangsúlyozni, hogy ez csak intuíció, ha biztosak akarunk lenni a dimenzió értékében, akkor bázist kell keresni.

0. Feladat

Adjuk meg a v vektor koordinátasorát a megadott bázisban.

- (a) $v = (0, 0, 0)$, bázis: $(3, -2, 1), (-2, 5, 7), (2, 1, 2)$;

- (b) $v = (1, -1, 2)$, bázis: $(1, 2, 3), (-1, 1, -2), (0, 2, 1)$;
 (c) $v = (2, 1, -1)$, bázis: $(-4, -2, 2), (1, 2, 4), (-1, 3, 9)$;
 (d) $v = (1, -1, 1)$, bázis: $(1, -1, 3), (2, -1, 4), (3, -1, 4)$;
 (e) $v = (6, 12, -2)$, bázis: $(3, 5, -7), (-5, -3, 7), (7, 3, 5)$;
 (f) $v = (1, 1, 1)$, bázis: $(4, 6, 7), (-3, 5, 7), (2, 5, 6)$.

1. Feladat

Hány dimenziós a legfeljebb másodfokú, valós együtthatós polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött?

Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ polinom esetében három számot érdemes „megtelefonálni”: az együtthatókat. Ezért a dimenzió várhatóan 3 lesz. Bázist úgy kereshetünk, hogy a polinomot olyan lineáris kombinációra bontjuk, ahol az együtthatók a megtelefonálandó számok. Az f polinom már eleve így van felírva, ezért várhatóan $1, x, x^2$ lesz bázis. Ez tényleg bázis, hiszen minden legfeljebb másodfokú polinom egyértelműen írható ezek lineáris kombinációjaként.

2. Feladat

Hány dimenziós $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ az $\mathbb{R}$ fölött? A mátrix négy elemét érdemes megtelefonálni. Ha bázist keresünk, akkor egy általános mátrixot kell olyan lineáris kombinációra bontani, ahol az együtthatók a mátrix elemei:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez a négy mátrix könnyen láthatóan bázist alkot, a dimenzió 4.

3. feladat

Hány dimenziós alteret alkotnak $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ szimmetrikus mátrixai?

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

azaz 3.

4. Feladat

Hány dimenziós a komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ fölött? A "fölött" szó arra utal, hogy valós számokat telefonálhatunk, a $c+di$ esetében a c és d számokat érdemes. Nyilván 1 és i bázist alkot, a dimenzió 2 .

Olyan tételeket ismételünk át, amelyek lerövidíthetők annak ellenőrzését, hogy egy vektorrendszer bázis-e. Különösen az lehet számolás, hogy generátorrendszerrel van-e szó.

1. Egy n -dimenziós vektortérben minden n elemű független rendszer bázis.
2. Egy n -dimenziós vektortérben minden n elemű generátorrendszer bázis.
3. Egy n -dimenziós vektortér minden valódi altere legfeljebb $(n - 1)$ -dimenziós.
4. Ha egy vektortérben van k független vektor, akkor a dimenzió legalább k .
5. Ha egy vektortér generálható k vektorral, akkor a dimenzió legfeljebb k .

5. Feladat

Hány dimenziós alteret alkotnak $\mathbb{R}$ fölött azok a legfeljebb harmadfokú, valós együtthatós polinomok, melyeknek gyöke az 1 ?

Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ polinom négy együtthatója közül most nem kell mind a négyet megtelefonálni, hiszen a partnerünk is tudja, hogy $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ értéke nulla, ezért ha három együtthatót ismer, akkor a negyediket ki tudja számolni. Ezért azt tippelhetjük, hogy a dimenzió 3 . Tehát három polinomot kell keresni, amik bázist alkotnak, mindegyiket ebből az altérből, azaz gyökük kell, hogy legyen az 1 .

Az I/4. feladat szerint különböző fokú polinomok rendszere független. Ezért például $x - 1$, $x(x - 1)$, $x^2(x - 1)$ függetlenek. Két megoldást is adunk arra, hogy bázist alkotnak.

Az f polinom $(x - 1)(bx^2 + cx + d)$ alakban írható, hiszen a gyöktényező kiemelhető, és ezért $x - 1$, $x(x - 1)$, $x^2(x - 1)$ egy lineáris kombinációja. Ezért ez a három polinom generátorrendszert alkot. Ez a megoldás csak erre a konkrét bázisra működik.

A második megoldásban észrevesszük, hogy a vektorterünk dimenziója legalább 3, hiszen van három független vektor. Továbbá valódi altere a legfeljebb harmadfokú polinomok négydimenziós vektorterének, hiszen például az x polinom nincs benne. Ezért dimenziója kisebb, mint 4. Így csak 3 lehet. De akkor a kiválasztott háromelemű független rendszer bázis. (Menet közben intenzíven használtuk a fenti öt tételt.)

Ha már tudjuk, hogy a dimenzió 3, akkor bármely három független polinom bázist alkot. Például $x - 1$, $(x - 1)^2$, $(x - 1)^3$ is bázis. Érdekes bebizonyítani ezzel a technikával, hogy minden polinom felírható $(x - 1)$ polinomjaként is (vö. iterált Horner, Taylor-polinom).

6. Feladat

Melyik bázis $\mathbb{R}^3$ -ben?

- (a) $\{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$;
- (b) $\{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (3, 2, 1)\}$;
- (c) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 4), (1, 3, 9)\}$;
- (d) $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$.

Mik az $(1, 0, 0)$ koordinátái?

A fenti (1) tétel miatt elég a függetlenséget ellenőrizni, amit például úgy tehetünk meg, hogy a vektorokat egy mátrix oszlopaiba írjuk, és megnézzük, hogy ennek determinánsa nulla-e.

Az (a) eset azért érdekes, mert semelyik két vektor sem összefüggő, de lesz két sor, ami egymás skalárszorosa.

A (b) determinánst fejtsük ki aszerint az oszlop szerint, amelyben két nulla is van.

A (c) esetben Vandermonde-determinánsról van szó.

Az $(1, 0, 0)$ koordinátáit lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk az adott bázisban.

Lineáris leképezések

Lineáris leképezéseknek (vagy vektortérhomomorfizmusoknak) a vektorterek művelettartó leképezéseit nevezzük. Fontos speciális eset az izomorfizmus, amikor a leképezés kölcsönösen egyértelmű, ekkor a két vektortér „tulajdonképpen ugyanaz”. A vektorterek „szép” szerkezetét mutatja, hogy a vektorteret már a dimenziója egyértelműen meghatározza, azaz (rögzített test felett) bármely két egyező dimenziójú vektortér izomorf.

Látni fogjuk, hogy a lineáris leképezések — a közöttük bevezetett műveleteket is beleértve — szoros kapcsolatban állnak a mátrixokkal. A leképezések mátrixokkal történő jellemzése mind elméleti, mind pedig gyakorlati szempontból rendkívül jelentős.

Definíció. Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon T kommutatív test feletti vektorterek. A V_1 -ről V_2 -be ható $\mathcal{A}$ függvényt (homogén) lineáris leképezésnek nevezzük, ha művelettartó, azaz:

- (i) minden $u, v \in V_1$ -re $\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v$,
- (ii) minden $u \in V_1$ -re és $\lambda \in T$ -re $\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda(\mathcal{A}u)$.

A lineáris leképezés tehát a V_1 vektortér minden eleméhez egyértelműen hozzárendel egy V_2 -beli vektort. Az nyugodtan előfordulhat, hogy több V_1 -beli elemhez is ugyanazt a V_2 -beli vektort rendeljük hozzá, azaz egy V_2 -beli vektornak lehet több ősképe is V_1 -ben. Másfelől, az sem biztos, hogy minden V_2 -beli vektor fellép a képek között, azaz lehet, hogy valamely V_2 -beli vektornak egyáltalán nincs ősképe V_1 -ben.

Az (i)-ben szereplő $+$ jelek nem ugyanazt a műveletet jelölik: a bal oldalon a V_1 -beli, a jobb oldalon pedig a V_2 -beli összeadásról van szó. Hasonló a helyzet (ii)-ben a skalárral való szorzással.

A lineáris leképezéseket írott nagybetűvel fogjuk jelölni. Az elnevezésben a „homogén” jelzőt általában elhagyjuk. Maga a fogalom az algebrai struktúrák homomorfizmusának speciális esete.

A lineáris leképezés az összegtartásból és a skalárszorostartásból következően a nullelemet, az ellentettet és a lineáris kombinációt is „tartja”:

Tétel.

I. $\mathcal{A}\underline{0}_1 = \underline{0}_2$, ahol a $\underline{0}_i$ a V_i vektortér nulleleme.

II. $\mathcal{A}(-u) = -(\mathcal{A}u)$.

III. $\mathcal{A}(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 \mathcal{A}u_1 + \dots + \lambda_k \mathcal{A}u_k$.

Bizonyítás: Házi Feladat (3 pont)

Minden lineáris leképezés két fontos halmazt indukál; a képelemek összességét (V_2 -ben), ez a **képtér**, valamint a $\underline{0}_2$ -ra képződő (V_1 -beli) elemek halmazát, ez a **magtér**:

Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképezés V_1 -ről V_2 -be. Az $\mathcal{A}$ leképezés képtere a képelemek halmaza, ezt $\text{Im } \mathcal{A}$ -val jelöljük. Tehát

$$\text{Im } \mathcal{A} = \{y \in V_2 \mid \exists x \in V_1, \mathcal{A}x = y\} = \{\mathcal{A}x \mid x \in V_1\}.$$

Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképezés V_1 -ről V_2 -be. Az $\mathcal{A}$ leképezés magtere a V_2 nullvektorára képződő elemek halmaza, ezt $\text{Ker } \mathcal{A}$ -val jelöljük. Tehát

$$\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in V_1 \mid \mathcal{A}x = \underline{0}_2\}.$$

$\text{Im } \mathcal{A}$ így V_2 -nek, $\text{Ker } \mathcal{A}$ pedig V_1 -nek részhalmaza. Mint az elnevezés jelzi, ennél több is igaz:

Tétel. $\text{Im } \mathcal{A}$ altér V_2 -ben, $\text{Ker } \mathcal{A}$ altér V_1 -ben.

Példák lineáris leképezésre P1. Legyen $V_1 = V_2$ a síkvektorok szokásos vektortere ($T = \mathbb{R}$). Ekkor lineáris leképezés pl.:

- a) az origó körül tetszőleges szöggel történő elforgatás;
- b) az origóból történő középpontos nagyítás;
- c) az origón átmenő bármely egyenesre való tükrözés.

Az a), b) és c) példánál $\text{Ker } \mathcal{A} = \underline{0}$, $\text{Im } \mathcal{A} = V_2$.

P2. Tetszőleges V_1 és V_2 esetén feleltessük meg V_1 minden elemének a V_2 nullelemét. Ezt a lineáris leképezést a **nulla leképezésnek** nevezzük és $\underline{0}$ -val jelöljük. Magtere a teljes V_1 , képtere a V_2 -beli $\underline{0}_2$.

P3. Ha $V = V_1 = V_2$, akkor feleltessük meg minden elemnek önmagát. Ezt a lineáris leképezést az **identikus leképezésnek** nevezzük és ϵ -nal jelöljük. Magtere a $\underline{0}$, képtere a teljes V .

Definíció. Azokat a lineáris leképezéseket, amelyeknél $V = V_1 = V_2$, a V vektortér **lineáris transzformációinak** nevezzük.

Lineáris transzformáció esetén is előfordulhat, hogy a képtér nem a teljes V , továbbá több vektornak is lehet ugyanaz a képe. A P1 és P3 példák tehát lineáris transzformációk.

Miért nem lineárisak az alábbi leképezések?

- (a) $V = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $W = \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ felett, $\mathcal{A}$ az $1 + i$ számmal való szorzás.
- (b) $V = W = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $\mathcal{A}$ a négyzetre emelés; az abszolút érték képzése.
- (e) $V = W$ a sík $\mathbb{R}$ felett, $\mathcal{A}$ egy eltolás; az $(1, 1)$ pontra tükrözés.

Az (a) nem ugyanazon test fölötti vektorterek között megy. A (b)-nél $(1 + 1)^2 \neq 1^2 + 1^2$, illetve $|1 + (-1)| \neq |1| + |-1|$.