

Lineáris és absztrakt algebra 5. gyakorlat

Lineáris transzformációk

2026. március 9.

Leképezések mátrixa

A mátrix és a leképezés ugyanannak az éremnek a két oldala, ahhoz hasonlóan, ahogy egy geometria feladatot is meg lehet oldani elemi eszközökkel és koordinátákkal való számolással is. A leképezés működését látni lehet, sokszor így érdemes tételeket bizonyítani. A mátrix viszont a konkrét számításokhoz nélkülözhetetlen, mint például a következő feladatban. A feladatot megoldhatnánk elemi geometriai eszközökkel is, de gyorsabb áttérni mátrixokra.

1. Feladat: Szorzás valós számmal

Adott $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ vektortér az $\mathbb{R}$ test felett. Az $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris transzformáció a 3-mal való szorzás, azaz $A(z) = 3z$. Írjuk fel a leképezés mátrixát a standard bázisban!

Megoldás

Mivel $\mathbb{C}$ -t $\mathbb{R}$ feletti vektortérként tekintjük, a dimenziója 2. A legtermészetesebb választás a standard bázis: $\mathcal{B} = \{1, i\}$.

Alkalmazzuk az A lineáris transzformációt a bázis elemeire:

- $A(1) = 3 \cdot 1 = 3 = 3 \cdot 1 + 0 \cdot i \implies$ Az első oszlopvektor: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $A(i) = 3 \cdot i = 3i = 0 \cdot 1 + 3 \cdot i \implies$ A második oszlopvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

A leképezés mátrixát a bázisvektorok képeinek koordinátavektoraiból kapjuk meg:

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A leképezés a valós és a képzetes részt is egyaránt a 3-szorosára nyújtja.

2. Feladat: Komplex konjugálás

Adott $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ vektortér az $\mathbb{R}$ test felett. Az $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris transzformáció a komplex konjugálás, azaz $A(z) = \bar{z}$. Írjuk fel a leképezés mátrixát a standard bázisban!

Megoldás

Itt is a $\mathcal{B} = \{1, i\}$ standard bázist használjuk. A konjugálás során a valós rész változatlan marad, a képzetes rész pedig előjelet vált.

- $A(1) = \bar{1} = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot i \implies$ Az első oszlopvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $A(i) = \bar{i} = -i = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot i \implies$ A második oszlopvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

A leképezés mátrixa:

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Geometriai jelentés: Ez a mátrix a valós tengelyre (x-tengelyre) való tükrözés mátrixa.

3. Feladat: Szorzás komplex számmal

Adott $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ vektortér az $\mathbb{R}$ test felett. Az $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris transzformáció az $(1 + i)$ -vel való szorzás, azaz $A(z) = (1 + i)z$. Írjuk fel a leképezés mátrixát a standard bázisban!

Megoldás

A bázis ismét $\mathcal{B} = \{1, i\}$. Alkalmazzuk a transzformációt:

- $A(1) = (1 + i) \cdot 1 = 1 + i = \mathbf{1} \cdot 1 + \mathbf{1} \cdot i \implies$ Az első oszlopvektor:
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $A(i) = (1 + i) \cdot i = i + i^2 = -1 + i = -\mathbf{1} \cdot 1 + \mathbf{1} \cdot i \implies$ A második oszlopvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

A leképezés mátrixa:

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Geometriai jelentés: Ha kiemelünk belőle egy $\sqrt{2}$ szorzót, láthatóvá válik a forgatómátrix struktúrája:

$$[A]_{\mathcal{B}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix}$$

Ez egy origó körüli 45° -os forgatást és egy $\sqrt{2}$ -es léptékű nyújtást jelent a komplex síkon.

4. Feladat (Beugratos): Nem lineáris leképezések

Adott $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ vektortér az $\mathbb{R}$ test felett. Írjuk fel (ha lehetséges) az alábbi leképezések mátrixát a standard bázisban:

1. Négyzetre emelés: $A(z) = z^2$
2. Abszolútérték képzés: $B(z) = |z|$
3. Reciprok képzés: $C(z) = \frac{1}{z}$

Megoldás

Egyik leképezésnek **sincs mátrixa**, mivel egyik sem lineáris transzformáció. Egy L leképezés csak akkor lineáris, ha teljesíti az additivitást ($L(u + v) = L(u) + L(v)$) és a skalárszorostartást ($L(c \cdot u) = c \cdot L(u)$) feltételeit. Ellenőrizzük ezeket!

1. Négyzetre emelés ($A(z) = z^2$) Vizsgáljuk meg az additivitást! Legyen $z_1 = 1$ és $z_2 = 1$.

- A két szám összegének képe: $A(1 + 1) = A(2) = 2^2 = 4$
- A képek összege: $A(1) + A(1) = 1^2 + 1^2 = 2$

Mivel $4 \neq 2$, az additivitás nem teljesül (hiszen $(z_1 + z_2)^2 \neq z_1^2 + z_2^2$), így a négyzetre emelés **nem lineáris**.

2. Abszolútérték képzés ($B(z) = |z|$) Vizsgáljuk meg a skalárszorostartást! Mivel a vektorterünk $\mathbb{R}$ feletti, a c skalár lehet negatív is. Legyen $z = 1$ és a skalár $c = -1$.

- A skalárszoros képe: $B(-1 \cdot 1) = |-1| = 1$
- A kép skalárszorosa: $-1 \cdot B(1) = -1 \cdot |1| = -1$

Mivel $1 \neq -1$, a leképezés nem tartja meg a negatív skalárral való szorzást, így **nem lineáris**. (Ráadásul az additivitást is elbukja a háromszög-egyenlőtlenség miatt: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$).

3. Reciprok képzés ($C(z) = \frac{1}{z}$) Egy lineáris leképezésnek a nullvektort (a mi esetünkben a $0 + 0i$ komplex számot) mindig a nullvektorba kell képeznie, azaz $L(0) = 0$ kötelező érvényű szabály. A reciprok képzésnél azonban $C(0) = \frac{1}{0}$, ami **nincs értelmezve**. Mivel a leképezés a

nullvektoron nem is értelmezhető, fel sem merülhet a linearitása. (Ezen felül az additivitást is elbukja, hiszen $\frac{1}{z_1+z_2} \neq \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$).

Összegzés: Mátrixszal csakis lineáris leképezéseket (nyújtás, forgatás, tükrözés, vetítés, nyírás) tudunk leírni. A fenti három művelet nem ilyen.

5. Feladat: Komponensek összege és szorzata

Adott $V_1 = \mathbb{R}^n$ és $V_2 = \mathbb{R}$ vektortér az $\mathbb{R}$ test felett. Vizsgáljuk meg az alábbi két leképezést:

1. $A(v)$: a v vektor komponenseinek összege.
2. $B(v)$: a v vektor komponenseinek szorzata.

Döntsük el, hogy lineárisak-e, és ha igen, írjuk fel a mátrixukat a standard bázisokban!

Megoldás

1. Leképezés: A komponensek összege ($A(v)$)

Legyen $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. A leképezés definíciója:

$$A(v) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Linearitás vizsgálata:

- **Additivitás:** Legyen $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ és $v = (v_1, \dots, v_n)^T$.

$$A(u+v) = (u_1+v_1) + \dots + (u_n+v_n) = (u_1 + \dots + u_n) + (v_1 + \dots + v_n) = A(u) + A(v)$$

Az additivitás teljesül.

- **Homogenitás:** Legyen $c \in \mathbb{R}$ egy skalár.

$$A(c \cdot v) = (cx_1) + (cx_2) + \dots + (cx_n) = c(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = c \cdot A(v)$$

A homogenitás is teljesül.

Mivel mindkét feltétel teljesül, $A(v)$ egy **lineáris leképezés**.

Mátrix felírása: Válasszuk $\mathbb{R}^n$ standard bázisát: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)^T$. A céltér $\mathbb{R}$, amelynek standard bázisa egyszerűen az $\{1\}$ egyelemű halmaz. A mátrix mérete $\dim(V_2) \times \dim(V_1)$, azaz $1 \times n$ lesz (egy sormátrix).

Nézzük meg a bázisvektorok képeit:

$$\begin{aligned} A(e_1) &= 1 + 0 + \dots + 0 = 1 \\ A(e_2) &= 0 + 1 + \dots + 0 = 1 \\ &\vdots \\ A(e_n) &= 0 + 0 + \dots + 1 = 1 \end{aligned}$$

Ezek a képek adják a transzformációs mátrix oszlopait. Így a leképezés mátrixa:

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2. Leképezés: A komponensek szorzata ($B(v)$)

A leképezés definíciója:

$$B(v) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

Linearitás vizsgálata: Ellenőrizzük a skalárszorostartást (homogenitást)! Legyen $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges skalár.

$$B(c \cdot v) = (cx_1) \cdot (cx_2) \cdot \dots \cdot (cx_n) = c^n(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = c^n \cdot B(v)$$

Láthatjuk, hogy $B(c \cdot v) \neq c \cdot B(v)$ (kivéve, ha $n = 1$, de általános $n > 1$ dimenzió esetén ez nem igaz). Például, ha egy vektort megszorozunk 2-vel $\mathbb{R}^3$ -ban, akkor a komponenseinek szorzata a $2^3 = 8$ -szorosára nő, nem pedig a kétszeresére.

Mivel a homogenitás nem teljesül (és mellesleg az additivitás sem, hiszen pl. $(1 + 0) \cdot (0 + 1) \neq 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1$), a komponensek szorzata **nem lineáris leképezés**. Emiatt **nincs transzformációs mátrix**.

6. Feladat: Leképezések a mátrixok terén

Adott $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ vektortér az $\mathbb{R}$ test felett (a 2×2 -es valós mátrixok tere). Vizsgáljuk meg az alábbi leképezéseket:

1. Transzponálás: $A(M) = M^T$
2. Szorzás skalárral: $A(M) = 2M$
3. Szorzás i -vel: $A(M) = iM$
4. Négyzetre emelés: $A(M) = M^2$

Döntsük el, hogy lineárisak-e, és ha igen, írjuk fel a mátrixukat a standard bázisban!

Megoldás

Mielőtt belevágunk, rögzítsük a terünk dimenzióját és bázisát! Mivel 2×2 -es mátrixokról van szó, a tér **4 dimenziós**. A standard bázist ($\mathcal{B}$) az alábbi négy mátrix alkotja:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Minden lineáris leképezés transzformációs mátrixa egy 4×4 -es mátrix lesz.

1. Transzponálás ($A(M) = M^T$)

A transzponálás additív ($(M + N)^T = M^T + N^T$) és homogén ($(cM)^T = cM^T$), tehát **lineáris leképezés**. Nézzük meg a báziselemek képeit:

- $A(E_{11}) = E_{11}^T = E_{11} \implies$ Koordinátavektora: $(1, 0, 0, 0)^T$
- $A(E_{12}) = E_{12}^T = E_{21} \implies$ Koordinátavektora: $(0, 0, 1, 0)^T$
- $A(E_{21}) = E_{21}^T = E_{12} \implies$ Koordinátavektora: $(0, 1, 0, 0)^T$

- $A(E_{22}) = E_{22}^T = E_{22} \implies$ Koordinátavektora: $(0, 0, 0, 1)^T$

Az oszlopvektorokat egymás mellé írva megkapjuk a leképezés mátrixát:

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Érdekesség: Jól látszik, hogy ez a transzformáció csak a 2. és a 3. koordinátát - azaz a mellékátló elemeit - cseréli fel, a főátló a helyén marad.)

2. Szorzás 2-vel ($A(M) = 2M$)

A skalárral való szorzás szintén **lineáris** ($2(M + N) = 2M + 2N$ és $2(cM) = c(2M)$). Minden báziselemet a kétszeresébe visz át:

$$A(E_{ij}) = 2E_{ij}$$

Emiatt a mátrixa egyszerűen a 4×4 -es identitásmátrix 2-szerese (egy diagonális mátrix csupa 2-essel a főátlóban):

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Szorzás i -vel ($A(M) = iM$)

Vigyázat, újabb csapda! Bár a szorzás önmagában lineáris művelet, nézzük meg alaposan a feltételeket! A feladat kikötötte, hogy $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ az $\mathbb{R}$ **test felett**. Ez azt jelenti, hogy a leképezésünk valós elemű mátrixokhoz valós elemű mátrixokat kell, hogy rendeljen. Ha egy valós M mátrixot megszorozunk az i képzetes egységgel, az eredmény egy komplex elemű mátrix lesz ($iM \notin \mathbb{R}^{2 \times 2}$). Mivel a leképezés "kivezet" a céltérből (V_2 -ből), ezen a téren az $A(M) = iM$ **nem értelmezhető** leképezésként (nem zárt a művelet), így transzformációs mátrixa sincs.

4. Négyzetre emelés ($A(M) = M^2$)

Vajon a mátrixok négyzetre emelése lineáris? Ellenőrizzük a homogenitást (skalárszorostartást)! Legyen $c \in \mathbb{R}$ egy skálár:

$$A(cM) = (cM)^2 = (cM)(cM) = c^2 M^2 = c^2 A(M)$$

Mivel $c^2 A(M) \neq cA(M)$ (kivéve a triviális $c = 0$ vagy $c = 1$ eseteket), a skalárszorostartás elbukik. (Ráadásul az additivitás sem teljesülne, hiszen $(M + N)^2 = M^2 + MN + NM + N^2 \neq M^2 + N^2$, mivel a mátrixszorzás nem kommutatív). Tehát az $A(M) = M^2$ **nem lineáris leképezés**, így **nincs transzformációs mátrixa**.

7. Feladat: Leképezések a polinomok terén

Adott $V_1 = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ (a valós együtthatós, legfeljebb harmadfokú polinomok vektortere) és $V_2 = \mathbb{C}$ vektortér az $\mathbb{R}$ test felett. Vizsgáljuk meg az $A : V_1 \rightarrow V_2$ leképezéseket, ha $f \in V_1$ egy tetszőleges polinom:

1. $A(f) = f(i)$ (a polinom helyettesítési értéke az i képzetes egységnél).

Döntsük el, hogy lineárisak-e, és ha igen, írjuk fel a mátrixukat a standard bázisokban!

Megoldás

Rögzítsük először a bázisokat és a dimenziókat!

- A kiindulási tér (V_1) **4 dimenziós**. Standard bázisa: $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$. Bármely polinom felírható $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ alakban.
- A céltér (V_2) az $\mathbb{R}$ felett **2 dimenziós**. Standard bázisa: $\mathcal{B}_2 = \{1, i\}$.

Ha egy leképezés lineáris, a transzformációs mátrixa $\dim(V_2) \times \dim(V_1)$, azaz egy 2×4 -es mátrix lesz.

1. Leképezés: $A(f) = f(i)$

Ez a leképezés egy klasszikus lineáris operátor (kiértékelés egy adott pontban). Linearitás ellenőrzése:

- Additivitás: $A(f + g) = (f + g)(i) = f(i) + g(i) = A(f) + A(g)$.
- Homogenitás: $A(c \cdot f) = (c \cdot f)(i) = c \cdot f(i) = c \cdot A(f)$.

Tehát **lineáris leképezés**. Írjuk fel a báziselemek képeit, és fejtsük ki őket a $\mathcal{B}_2 = \{1, i\}$ bázisban:

- $f_1(x) = 1 \implies A(f_1) = 1 = \mathbf{1} \cdot 1 + \mathbf{0} \cdot i \implies (1, 0)^T$
- $f_2(x) = x \implies A(f_2) = i = \mathbf{0} \cdot 1 + \mathbf{1} \cdot i \implies (0, 1)^T$
- $f_3(x) = x^2 \implies A(f_3) = i^2 = -1 = -\mathbf{1} \cdot 1 + \mathbf{0} \cdot i \implies (-1, 0)^T$
- $f_4(x) = x^3 \implies A(f_4) = i^3 = -i = \mathbf{0} \cdot 1 + -\mathbf{1} \cdot i \implies (0, -1)^T$

Az oszlopvektorokat egymás mellé írva kapjuk a transzformációs mátrixot:

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$