

Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

matematika BSc

2026.03.16.

Sajátérték, sajátvektor

Ebben a fejezetben V mindig véges dimenziós, nemnulla vektortér a T kommutatív test felett, és A tetszőleges lineáris transzformáció. A dimenzió végenségét általában igen erősen ki fogjuk használni.

Ha az A transzformáció egy nemnulla vektort a skalárszorosába képez le (azaz a vektor a transzformáció hatására a „saját egyenesében” marad), akkor ezt a vektort (az A -hoz tartozó) sajátvektornak, a megfelelő skalárt (azaz „a nagyítás mértékét”) sajátértéknek nevezzük.

Definíció: Egy $\lambda \in T$ skalárt az A lineáris transzformáció sajátértékének nevezünk, ha létezik olyan $v \in V$ nemnulla vektor ($v \neq \underline{0}$), amelyre

$$Av = \lambda v.$$

Definíció: Egy $v \in V$ nemnulla vektort ($v \neq \underline{0}$) az A lineáris transzformáció sajátvektorának nevezünk, ha létezik olyan $\lambda \in T$ skalár, amelyre

$$Av = \lambda v.$$

Ha $v \neq \underline{0}$ és $Av = \lambda v$, akkor λ -t a v -hez tartozó sajátértéknek, v -t pedig a λ -hoz tartozó (egyik) sajátvektornak nevezzük.

Megjegyzések a definíciókhoz

A sajátérték definíciójában a nullvektort mindenképpen ki kellett zárunk, hiszen $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ minden λ -ra fennáll, vagyis a kikötés nélkül a test minden eleme sajátérték lenne.

A sajátvektoroknál is célszerű kihagyni a nullvektort, például azért, mert a „hozzá tartozó” λ nem egyértelmű (sőt bármi lehet).

FIGYELEM! A sajátértékek köréből azonban *nem* zárjuk ki a 0 skalárt. A definícióból azonnal adódik, hogy a 0 pontosan akkor sajátértéke A -nak, ha $\text{Ker } A \neq \{\mathbf{0}\}$, a megfelelő sajátvektorok pedig a magtér nemnulla elemei.

Geometriai példák

- Az identikus leképezésnek (ε) egyetlen sajátértéke az 1, és minden nemnulla vektor sajátvektor.
- A síkon az origó körüli forgatásnak nincs valós sajátértéke (és így persze sajátvektora sem), kivéve, ha a forgatás szöge π -nek egész számú többszöröse.
- Az origón átmenő egyenesre való tükrözés sajátértékei az 1 és a -1 .
- Az origón átmenő egyenesre való vetítés sajátértékei az 1 és a 0.

A sajátaltér

Tétel:

- I. Minden sajátvektorhoz csak egy sajátérték tartozik.
- II. Egy adott λ sajátértékhez tartozó összes sajátvektor és a $\mathbf{0}$ alteret alkotnak. Ezt az alteret a λ -hoz tartozó **sajátaltérnek** nevezzük.

Megjegyzés: Egy sajátaltér — a sajátérték definíciója alapján — nem állhat egyedül a $\underline{0}$ vektorból.

Tétel: Egy transzformáció mátrixa akkor és csak akkor diagonális, ha a mátrixot sajátvektorokból álló bázis szerint írtuk fel. Ekkor a főátlóban álló elemek éppen a megfelelő bázisvektorokhoz tartozó sajátértékek.

Bizonyítás:

$$[\mathcal{A}]_a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

A fenti felírás pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{A}a_1 = \lambda_1 a_1, \dots, \mathcal{A}a_n = \lambda_n a_n$, ami pontosan a sajátvektorok és a hozzájuk tartozó sajátértékek definíciója. $\square$

A sajátértékek kiszámítása a következő. Ha transzformációról van szó, akkor legyen M a mátrixa. A $k_M(x) = \det(M - xE)$ kifejezés x -nek a karakterisztikus polinomja, ahol E az egységmátrix, ennek gyökei a sajátértékek. Minden egyes λ sajátértékhez $Mv = \lambda v$ egy homogén lineáris egyenletrendszer a v vektor komponenseire. (Ha csak a csupa nulla megoldás van, akkor valamit elszámoltunk.) A sajátaltér dimenziója a szabad változók száma.

Diagonizálhatóság

Görbék szebb egyenletének felírásához, differenciálegyenletek megoldásához, mátrixok gyors hatványozásához hasznos olyan bázist keresni, amelyben a mátrix diagonális, azaz a főátlón kívül minden eleme nulla. Ez azt jelenti, hogy a bázis elemei sajátvektorok, a főátlóban pedig a megfelelő sajátértékek állnak. Ha van ilyen bázis, akkor a mátrixot **diagonalizálhatónak** nevezzük. Például a tengelyes tükrözés diagonalizálható, mert egy tengely irányú és egy tengelyre merőleges nemnulla

vektor bázist alkot. A 90° -os forgatás $\mathbb{R}$ fölött nem diagonalizálható, de $\mathbb{C}$ fölött igen.

Egy λ sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója a λ **geometriai multiplicitása**. Ha mindegyik sajátaltérben veszünk egy bázist, akkor ezek együtt bázist alkotnak a térben is. Ezért egy $n \times n$ -es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a geometriai multiplicitások összege n . Ha λ a minimálpolinomnak k -szoros gyöke, akkor k a λ **algebrai multiplicitása**, ami legalább akkora, mint a geometriai multiplicitása. Így ha a karakterisztikus polinomnak n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

A síkon egy egyenesre vetítés karakterisztikus polinomja $x^2 - x$, aminek két (valós) gyöke van, ezért a vetítések diagonalizálhatók. A 180° -os forgatás karakterisztikus polinomja $(x + 1)^2$, a -1 sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása is 2, ez a transzformáció tehát szintén diagonalizálható, noha a karakterisztikus polinomjának csak egy gyöke van. A deriválás a harmadfokú polinomok terén nem diagonalizálható semelyik test fölött sem, az egyetlen sajátérték a 0, melynek algebrai multiplicitása 4, a geometriai csak 1.

Feladatok

Feladat: Határozzuk meg az alábbi mátrix diagonalizálhatóságát, karakterisztikus polinomját, sajátértégeit, sajátaltereit, valamint ezek dimenzióját $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

1. Karakterisztikus polinom: A karakterisztikus polinomot a $\det(A - \lambda E)$ képlettel számoljuk ki:

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^2 - 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 1$$

2. Sajátértékek: A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei ($P(\lambda) = 0$):

$$\lambda^2 - 1 = 0 \implies (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

A sajátértékek tehát $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -1$. (Mindkettő valós szám, így az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti vizsgálat megegyezik. Mindkét sajátérték algebrai multiplicitása 1).

3. Sajátalterek és dimenziójuk:

- **A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér:** Megoldjuk az $(A - 1 \cdot E)v = 0$ egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebből a $-x + y = 0$ egyenlet adódik, vagyis $y = x$. A sajátvektorok $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alakúak ($x \neq 0$). A sajátaltér bázisa: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Ennek **dimenziója** 1 (geometriai multiplicitás = 1).

- **A $\lambda_2 = -1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér:** Megoldjuk az $(A - (-1) \cdot E)v = 0$, azaz $(A + E)v = 0$ egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebből az $x + y = 0$ egyenlet adódik, vagyis $y = -x$. A sajátvektorok $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ alakúak ($x \neq 0$). A sajátaltér bázisa: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Ennek **dimenziója** 1 (geometriai multiplicitás = 1).

4. Diagonalizálhatóság: A mátrix egy 2×2 -es mátrix, és van két különböző valós sajátértéke. A geometriai multiplicitások összege ($1 + 1 = 2$) megegyezik a mátrix méretével ($n = 2$). Emiatt a mátrix **diagonalizálható** mind $\mathbb{R}$, mind $\mathbb{C}$ felett.

Feladat: Határozzuk meg az alábbi mátrix diagonalizálhatóságát, karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, sajátaltérét, valamint ezek dimenzióját $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

1. Karakterisztikus polinom: A karakterisztikus polinomot a $\det(A - \lambda E)$ képlettel számoljuk ki:

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^2 - (-1 \cdot 1) = \lambda^2 + 1$$

2. Vizsgálat a valós számok ($\mathbb{R}$) felett:

- **Sajátértékek:** A $\lambda^2 + 1 = 0$ egyenletnek **nincsenek valós gyökei**. Tehát $\mathbb{R}$ felett a mátrixnak nincs sajátértéke.
- **Sajátaltérek:** Mivel nincs sajátérték, sajátaltérek sincsenek (dimenziójuk 0).
- **Diagonalizálhatóság:** Mivel nincsenek sajátvektorok, nem tudunk belőlük bázist alkotni, így a mátrix **nem diagonalizálható $\mathbb{R}$ felett**. (Geometriaileg ez egy 90° -os forgatás, ami minden nem-nulla vektort elmozdít a saját egyeneséről).

3. Vizsgálat a komplex számok ($\mathbb{C}$) felett:

- **Sajátértékek:** A $\lambda^2 + 1 = 0$ egyenlet gyökei a komplex számok halmazán: $\lambda_1 = i$ és $\lambda_2 = -i$. (Mindkét sajátérték algebrai multiplicitása 1).
- **Sajátaltérek és dimenziójuk:**

- **A $\lambda_1 = i$ sajátértékhez tartozó sajátaltér:**
Megoldjuk az $(A - iE)v = 0$ egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A második sorból $x - iy = 0$, azaz $x = iy$. (Az első sor ugyanezt adja: $-ix - y = 0 \implies y = -ix$).

A sajátvektorok $\begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ alakúak ($y \neq 0$).

A sajátaltér bázisa: $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Ennek **dimenziója** 1. (Meg-

jegyzés: $a \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ is tökéletesen jó bázisvektor).

– **A $\lambda_2 = -i$ sajátértékhez tartozó sajátaltér:**

Megoldjuk az $(A + iE)v = 0$ egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A második sorból $x + iy = 0$, azaz $x = -iy$.

A sajátvektorok $\begin{pmatrix} -iy \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ alakúak ($y \neq 0$).

A sajátaltér bázisa: $\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Ennek **dimenziója** 1. (Vagy $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$).

- **Diagonalizálhatóság:** Mivel a mátrix 2×2 -es, és van két különböző komplex sajátértéke (így a geometriai multiplicitások összege $1 + 1 = 2$), a mátrix **diagonalizálható $\mathbb{C}$ felett**.

Feladat: Határozzuk meg az alábbi mátrix diagonalizálhatóságát, karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, sajátaltereit, valamint ezek dimenzióját $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett!

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Megoldás:

1. Karakterisztikus polinom: A karakterisztikus polinomot a $\det(A - \lambda E)$ képlettel számoljuk ki:

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 0 \\ 1 & \alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\alpha - \lambda)(\alpha - \lambda) - 0 \cdot 1 = (\lambda - \alpha)^2$$

2. Sajátértékek: A karakterisztikus polinom gyökei adják a sajátértékeket ($P(\lambda) = 0$):

$$(\lambda - \alpha)^2 = 0 \implies \lambda = \alpha$$

Tehát a mátrixnak egyetlen sajátértéke van, az α . Mivel ez a karakterisztikus polinomnak kétszeres gyöke, az **algebrai multiplicitása 2**. (Ez a megállapítás megegyezik $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett is).

3. Sajátalterek és dimenziójuk: A $\lambda = \alpha$ sajátértékhez tartozó sajátaltér meghatározásához megoldjuk az $(A - \alpha E)v = \underline{0}$ egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} \alpha - \alpha & 0 \\ 1 & \alpha - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A mátrixszorzást elvégezve a következő egyenleteket kapjuk:

- Az első sorból: $0 = 0$ (ez nem ad új információt).
- A második sorból: $1 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \implies x = 0$.

Láthatjuk, hogy az x koordinátának kötelezően nullának kell lennie, viszont az y változóra semmilyen megkötést nem kaptunk, így az tetszőleges szabad paraméter lehet. A sajátvektorok tehát $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alakúak ($y \neq 0$).

A sajátaltér bázisa: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Ennek a bázisnak egyetlen eleme van, így a sajátaltér **dimenziója 1** (tehát a geometriai multiplicitás = 1).

4. Diagonalizálhatóság: Egy $n \times n$ -es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a geometriai multiplicitások összege megegyezik a

mátrix méretével (n). Jelen esetben a mátrix 2×2 -es ($n = 2$), de a geometriai multiplicitások összege csak 1 (ami szigorúan kisebb, mint az algebrai multiplicitása). Mivel nem tudunk 2 darab lineárisan független sajátvektort kiválasztani, nem alkothatnak bázist a térben. Így ez a mátrix **sem $\mathbb{R}$, sem $\mathbb{C}$ felett nem diagonalizálható**.

(Megjegyzés: Az ilyen típusú mátrixokat Jordan-blokkoknak nevezzük, és ezek adják a lineáris algebra nem diagonalizálható, „legrosszabbul viselkedő” alapeseteit.)

HF Vizsgáljuk meg az alábbi mátrix diagonalizálhatóságát, és adjuk meg a diagonális alakját (ha létezik) $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Feladat Mik az origó körüli $\alpha \neq 0^\circ, 180^\circ$ szögű forgatás mátrixának sajátvektorai $\mathbb{C}$ fölött?

$$k(x) = \begin{vmatrix} \cos \alpha - x & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - x \end{vmatrix} = x^2 - 2x \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = x^2 - 2x \cos \alpha + 1,$$

a két gyök, azaz a sajátértékek $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$ (emlékezzünk vissza, hogy az ezekkel való szorzás pontosan a $\pm \alpha$ szögű forgatás a komplex síkon). A megfelelő sajátvektorok az $[1, \mp i]^T$ vektorok nemnulla skalárszorosai, a sajátalterek egydimenziósak.

Feladat: Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit, sajátaltereit, valamint ezek dimenzióját!

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Feladatok

Kérdés: Hogyan látszik a karakterisztikus polinomról, hogy a transzformáció invertálható-e?

Válasz és levezetés:

Egy A lineáris transzformáció (vagy mátrix) invertálhatósága közvetlenül leolvasható a karakterisztikus polinomjának **konstans tagjából**. A transzformáció pontosan akkor invertálható, ha ez a konstans tag **nem nulla**.

Ennek az oka a következő gondolatmenetben rejlik:

1. **Invertálhatóság feltétele:** Egy lineáris transzformáció pontosan akkor invertálható, ha a magtere triviális ($\text{Ker } A = \{\underline{0}\}$), ami azzal egyenértékű, hogy a mátrixának determinánsa nem nulla ($\det A \neq 0$).
2. **A nulla mint sajátérték:** Ha a magtér nem csak a nullvektorból áll, akkor létezik olyan $v \neq \underline{0}$ vektor, amelyre $Av = \underline{0}$. Ezt felírhatjuk $Av = 0 \cdot v$ alakban is, ami pontosan azt jelenti, hogy a 0 sajátértéke az A -nak. Tehát az invertálhatóság azzal ekvivalens, hogy a 0 **nem sajátérték**.
3. **A karakterisztikus polinom gyökei:** A sajátértékek definíció szerint a karakterisztikus polinom ($P(x) = \det(A - xE)$) gyökei. Ha a 0 nem sajátérték, az azt jelenti, hogy az $x = 0$ nem gyöke a polinomnak, azaz $P(0) \neq 0$.
4. **A konstans tag:** Bármely $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ polinom esetén a $P(0)$ érték pontosan a polinom konstans tagjával (c_0) egyezik meg.

Sőt, ha jobban megnézzük a definíciót:

$$P(0) = \det(A - 0 \cdot E) = \det(A)$$

Tehát a karakterisztikus polinom konstans tagja mindig pontosan a transzformáció determinánsa (vagy $(-1)^n \cdot \det(A)$, attól függően, hogy a $\det(A - xE)$ vagy a $\det(xE - A)$ konvenciót használjuk a polinom felírására).

Következtetés: Mivel az invertálhatóság feltétele, hogy a determináns ne legyen nulla, ez pontosan azt jelenti, hogy a karakterisztikus polinom konstans tagja nem lehet nulla.

6.1.1. Feladat: Legyen V a legfeljebb 6-odfokú valós együtthatós polinomok (és a 0) szokásos vektortere. Egy általános polinomot f -fel jelölünk. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait. Hány dimenziósak a megfelelő sajátalterek? Mely transzformációknak létezik diagonális mátrixa?

Megjegyzés: A vektortér dimenziója $\dim(V) = 7$, hiszen a szokásos bázisa az $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$ halmaz. A sajátérték-egyenlet általános alakja $\mathcal{A}(f) = \lambda f$, ahol $f \neq 0$.

a) $\mathcal{A}(f) = f'$

Keressük azokat a nemnulla polinomokat, amelyek deriváltja önmaguk skalárszorosa: $f' = \lambda f$. Mivel egy nem konstans polinom deriválásakor a foksám csökken, a két oldal csak akkor lehet egyenlő, ha a foksám nulla (azaz f egy nemnulla konstans polinom: $f(x) = c$, ahol $c \neq 0$). Ekkor $f'(x) = 0$. Behelyettesítve: $0 = \lambda c$, amiből $\lambda = 0$ következik.

- **Sajátérték:** $\lambda = 0$
- **Sajátvektorok:** Minden nemnulla konstans polinom ($f(x) = c, c \neq 0$).
- **Sajátaltér dimenziója:** 1 (az $f(x) = 1$ polinom feszíti ki).
- **Diagonális mátrix:** Nem létezik, mivel a sajátalterek dimenzióinak összege (1) kisebb, mint a tér dimenziója (7), így nem tudunk sajátvektorokból álló bázist kiválasztani.

b) $\mathcal{B}(f) = xf'$

Legyen $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_6x^6$. Ekkor $x \cdot f'(x) = c_1x + 2c_2x^2 + \dots + 6c_6x^6$. A k -adfokú tagok együtthatóit összehasonlítva a sajátérték-egyenletből ($xf' = \lambda f$) azt kapjuk, hogy minden $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$ esetén $k \cdot c_k = \lambda \cdot c_k$. Ez csak akkor teljesülhet egy nemnulla tagnál, ha $\lambda = k$.

- **Sajátértékek:** $\lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (7 darab különböző sajátérték).
- **Sajátvektorok:** A $\lambda = k$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok a k -adfokú tiszta hatványok: $f(x) = c \cdot x^k$ ($c \neq 0$).
- **Sajátaltér dimenziója:** Minden sajátértékhez tartozó altér 1 dimenziós.
- **Diagonális mátrix: Létezik,** hiszen van 7 darab lineárisan független sajátvektorunk (pont a kanonikus bázis), így a sajátaltérek dimenzióösszege kiadja a 7-et.

HF) $\mathcal{C}(f) = f(6) \cdot x^6$

d) $\mathcal{D}(f) = f$ **maradéka $x^2 + 2x + 3$ -mal osztva**

Jelöljük a legfeljebb elsőfokú maradékot $r(x)$ -szel. Ekkor $f(x) = q(x)(x^2 + 2x + 3) + r(x)$. A sajátérték-egyenlet: $r(x) = \lambda f(x)$. Itt is két eset van:

- 1. eset ($\lambda = 0$):** Ekkor $r(x) = 0$, tehát $f(x)$ osztható $(x^2 + 2x + 3)$ -mal. Mivel f legfeljebb 6-odfokú, a hányados $q(x)$ legfeljebb 4-edfokú.
- 2. eset ($\lambda \neq 0$):** Ekkor $f(x) = \frac{1}{\lambda}r(x)$, tehát magának az f -nek is legfeljebb elsőfokúnak kell lennie. Ha viszont f foka kisebb, mint az osztó foka (2), akkor a maradék önmaga lesz: $r(x) = f(x)$. Így $f(x) = \lambda f(x)$, azaz $\lambda = 1$.

- **Sajátértékek:** $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 1$.
- **Sajátvektorok:**

- $\lambda_1 = 0$ esetén: az $f(x) = q(x)(x^2 + 2x + 3)$ alakú polinomok, ahol q tetszőleges, legfeljebb 4-edfokú polinom ($f \neq 0$).
- $\lambda_2 = 1$ esetén: tetszőleges, nemnulla legfeljebb elsőfokú polinom ($f(x) = ax + b$).
- **Sajátaltér dimenziója:** A $\lambda_1 = 0$ -hoz tartozó altér dimenziója megegyezik a legfeljebb 4-edfokú polinomok terének dimenziójával ($4 + 1 = \mathbf{5}$). A $\lambda_2 = 1$ -hez tartozó altér dimenziója a legfeljebb elsőfokú polinomok terének dimenziója ($1 + 1 = \mathbf{2}$).
- **Diagonális mátrix: Létezik,** mert a sajátaltérek dimenzióösszege $5 + 2 = 7$.

Műveletek sajátértékekkel

Kérdés: Legyen $A, B \in \text{Hom}(V)$ és α közös sajátértéke A -nak és B -nek. Következik-e ebből, hogy μA -nak, $A + B$ -nek, A^2 -nek, AB -nek, illetve A^{-1} -nek is van sajátértéke, és ha igen, akkor hogyan függ ez a sajátérték α -tól?

Megoldás:

A válasz megadásánál a definícióra támaszkodunk. Ha α sajátértéke A -nak, akkor létezik olyan $v \neq \underline{0}$ vektor, amelyre $Av = \alpha v$. Hasonlóan, létezik olyan $w \neq \underline{0}$, amelyre $Bw = \alpha w$. (Fontos: v és w általában *nem* ugyanaz a vektor!)

- **A μA transzformáció: Igen.**

Bizonyítás: $(\mu A)v = \mu(Av) = \mu(\alpha v) = (\mu\alpha)v$.

A sajátérték: $\mu\alpha$.

- **Az A^2 transzformáció: Igen.**

Bizonyítás: $A^2v = A(Av) = A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha(\alpha v) = \alpha^2v$.

A sajátérték: α^2 .

- **Az A^{-1} transzformáció: Igen** (ha létezik).

Ha A invertálható, akkor 0 nem sajátérték, így $\alpha \neq 0$.

Bizonyítás: $Av = \alpha v \implies A^{-1}(Av) = A^{-1}(\alpha v) \implies v = \alpha A^{-1}v \implies A^{-1}v = \frac{1}{\alpha}v$.
A sajátérték: $\frac{1}{\alpha}$.

Műveletek közös sajátvektorral

Kérdés: Legyen $A, B \in \text{Hom}(V)$ és v közös sajátvektora A -nak és B -nek. Következik-e ebből, hogy v sajátvektora μA -nak, $A + B$ -nek, A^2 -nek, AB -nek, illetve A^{-1} -nek is, és ha igen, akkor milyen sajátérték tartozik hozzá?

Megoldás:

A válasz minden esetben **igen** (az inverznél az invertálhatóság feltételével). Mivel v közös sajátvektor, léteznek olyan α és β skalárok, amelyekre $Av = \alpha v$ és $Bv = \beta v$ (ahol $v \neq \underline{0}$). A lineáris transzformációk tulajdonságait felhasználva kapjuk a következőket:

- **A μA transzformáció:**

$$(\mu A)v = \mu(Av) = \mu(\alpha v) = (\mu\alpha)v.$$

Tehát v sajátvektor, a hozzá tartozó sajátérték pedig $\mu\alpha$.

- **Az $A + B$ transzformáció:**

$$(A + B)v = Av + Bv = \alpha v + \beta v = (\alpha + \beta)v.$$

Tehát v sajátvektor, a hozzá tartozó sajátérték pedig $\alpha + \beta$.

- **Az A^2 transzformáció:**

$$A^2v = A(Av) = A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha(\alpha v) = \alpha^2v.$$

Tehát v sajátvektor, a hozzá tartozó sajátérték pedig α^2 .

- **Az AB transzformáció:**

$$(AB)v = A(Bv) = A(\beta v) = \beta(Av) = \beta(\alpha v) = (\alpha\beta)v.$$

Tehát v sajátvektor, a hozzá tartozó sajátérték pedig $\alpha\beta$.

- **Az A^{-1} transzformáció:**

Feltesszük, hogy A invertálható, azaz $\text{Ker } A = \{\underline{0}\}$, így az α sajátérték nem lehet 0.

$$Av = \alpha v \implies A^{-1}(Av) = A^{-1}(\alpha v) \implies v = \alpha A^{-1}v \implies A^{-1}v = \frac{1}{\alpha}v.$$

Tehát v sajátvektor, a hozzá tartozó sajátérték pedig $\frac{1}{\alpha}$.

Igaz-hamis állítások sajátértékekről és sajátvektorokról

Melyek igazak az alábbi állítások közül?

- a) Ha v sajátvektora A^2 -nek, akkor v sajátvektora A -nak.

Hamis. Legyen A egy origó körüli 90° -os forgatás. Ennek nincsenek sajátvektorai a valós térben. Viszont A^2 egy 180° -os forgatás $(-1 \cdot \varepsilon)$, amelynek *minden* vektor sajátvektora.

- b) Ha a 0 sajátértéke A^2 -nek, akkor a 0 sajátértéke A -nak.

Igaz. Ha a 0 sajátértéke A^2 -nek, akkor $\det(A^2) = 0$. Mivel $\det(A^2) = (\det A)^2$, ez csak úgy lehet nulla, ha $\det(A) = 0$. Ha pedig A determinánsa nulla, akkor a 0 sajátértéke A -nak.

- c) Ha $\mu^2 = \lambda$, és a λ sajátértéke A^2 -nek, akkor a μ és a $-\mu$ közül legalább az egyik sajátértéke A -nak.

Igaz. A determinánsok tulajdonságaiból: $0 = \det(A^2 - \mu^2 \varepsilon) = \det((A - \mu \varepsilon)(A + \mu \varepsilon)) = \det(A - \mu \varepsilon) \cdot \det(A + \mu \varepsilon)$. Mivel a szorzat nulla, legalább az egyik determinánsnak nullának kell lennie, tehát μ vagy $-\mu$ sajátértéke A -nak.