

Gram-Schmidt ortogonalizáció feladat

Lineáris algebra

További példa: Gram-Schmidt ortogonalizáció (Indefinit eset)

Legyen $V = \mathbb{R}^3$. Keressünk $\mathbf{A}$ -ortogonális bázist a Gram-Schmidt eljárással, és írjuk fel a függvény diagonális mátrixát a következő szimmetrikus bilineáris függvényhez:

$$\mathbf{A}(u, v) = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + u_1v_3 + u_3v_1 + 3u_2v_2 + u_2v_3 + u_3v_2 + 2u_3v_3$$

Megoldás:

Segítségképpen írjuk fel a függvény mátrixát a szokásos E bázisban. Ebből sokszor könnyebb leolvasni a bázisvektorok egymással vett szorzatait:

$$[\mathbf{A}]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Lépés: Az első vektor (c_1)

Az első bázisvektort változtatás nélkül megtartjuk:

$$c_1 = b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Értéke önmagával az u_1v_1 együtthatója (vagy a mátrix bal felső eleme):

$$\mathbf{A}(c_1, c_1) = 1$$

2. Lépés: A második vektor (c_2)

A második vektort $c_2 = b_2 + p_{21}c_1$ alakban keressük. Az $\mathbf{A}$ -ortogonalitási feltétel:

$$0 = \mathbf{A}(c_2, c_1) = \mathbf{A}(b_2, c_1) + p_{21}\mathbf{A}(c_1, c_1)$$

A mátrixból látjuk, hogy $\mathbf{A}(b_2, c_1) = 2$ (első oszlop, második sor).

$$2 + p_{21} \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{21} = -2$$

Így a második vektor:

$$c_2 = b_2 - 2c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki a c_2 értékét önmagával ($\mathbf{A}(c_2, c_2)$). A mátrixszorzás segítségével:

$$\mathbf{A}(c_2, c_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

3. Lépés: A harmadik vektor (c_3)

A harmadik vektort $c_3 = b_3 + p_{31}c_1 + p_{32}c_2$ alakban keressük. Két feltételnek kell teljesülnie:

Első feltétel ($\mathbf{A}(c_3, c_1) = 0$):

$$\mathbf{A}(b_3, c_1) + p_{31}\mathbf{A}(c_1, c_1) = 0$$

Mivel $\mathbf{A}(b_3, c_1) = 1$ (a mátrix első oszlopának harmadik eleme):

$$1 + p_{31} \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{31} = -1$$

Második feltétel ($\mathbf{A}(c_3, c_2) = 0$):

$$\mathbf{A}(b_3, c_2) + p_{32}\mathbf{A}(c_2, c_2) = 0$$

Számoljuk ki az $\mathbf{A}(b_3, c_2)$ értéket! Az $u = b_3 = (0, 0, 1)$ sorvektor a mátrix 3. sorát választja ki, ezt kell szorozni a c_2 oszlopvektorral:

$$\mathbf{A}(b_3, c_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + 1 + 0 = -1$$

Behelyettesítve a feltételbe (emlékezzünk, hogy $\mathbf{A}(c_2, c_2) = -1$):

$$-1 + p_{32} \cdot (-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad -p_{32} = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{32} = -1$$

Így a harmadik vektor összeállt:

$$c_3 = b_3 - 1c_1 - 1c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki a c_3 értékét önmagával:

$$\mathbf{A}(c_3, c_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

Végeredmény:

A megkonstruált $\mathbf{A}$ -ortogonális bázis:

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A bilineáris függvény diagonális mátrixa ebben az új bázisban:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: Mivel a diagonális mátrix főátlójában pozitív (1, 2) és negatív (-1) értékek is szerepelnek, a kvadratikus alak **indefinit**.