

Lineáris algebra gyakorlat

2026. április 20.

Bilineáris függvények

Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett. Az $\mathbf{A} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést **(valós) bilineáris függvénynek** nevezzük, ha mindkét változójában lineáris, azaz az egyik változó bármely rögzített értéke esetén a másik változójában lineáris.

Ez részletesen kiírva a következőket jelenti $(u, u', v, v' \in V, \lambda \in \mathbb{R})$:

- (i) $\mathbf{A}$ minden (u, v) vektorpárhoz egyértelműen hozzárendel egy valós számot;
- (ii) $\mathbf{A}(u + u', v) = \mathbf{A}(u, v) + \mathbf{A}(u', v)$;
- (iii) $\mathbf{A}(\lambda u, v) = \lambda \mathbf{A}(u, v)$;
- (iv) $\mathbf{A}(u, v + v') = \mathbf{A}(u, v) + \mathbf{A}(u, v')$;
- (v) $\mathbf{A}(u, \lambda v) = \lambda \mathbf{A}(u, v)$.

A bilineáris függvényeket vastag latin nagybetűvel fogjuk jelölni. A definícióból és a lineáris leképezések tulajdonságaiból azonnal következnek az alábbi azonosságok:

- (vi) $\mathbf{A}(u, \mathbf{0}) = \mathbf{A}(\mathbf{0}, v) = 0$;
- (vii) $\mathbf{A}(-u, v) = \mathbf{A}(u, -v) = -\mathbf{A}(u, v)$;
- (viii) $\mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^m \mu_j v_j\right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j \mathbf{A}(u_i, v_j)$.

Tétel (Bilineáris függvény megadása bázison)

Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis a V vektortérben, és legyenek α_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) tetszőleges valós számok. Ekkor pontosan egy olyan $\mathbf{A}$ bilineáris függvény létezik, amelyre

$$\mathbf{A}(b_i, b_j) = \alpha_{ij}, \quad \text{minden } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ esetén.}$$

A bilineáris függvény mátrixa

Definíció: Az $\mathbf{A}$ bilineáris függvénynek a $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ bázis szerinti mátrixán azt az $n \times n$ -es mátrixot értjük, amelyben az i -edik sor j -edik eleme $\alpha_{ij} = \mathbf{A}(b_i, b_j)$. Ezt a mátrixot $[\mathbf{A}]_B$ -vel jelöljük:

$$[\mathbf{A}]_B = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(b_1, b_1) & \mathbf{A}(b_1, b_2) & \dots & \mathbf{A}(b_1, b_n) \\ \mathbf{A}(b_2, b_1) & \mathbf{A}(b_2, b_2) & \dots & \mathbf{A}(b_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}(b_n, b_1) & \mathbf{A}(b_n, b_2) & \dots & \mathbf{A}(b_n, b_n) \end{pmatrix}$$

Ne felejtsük el, hogy a lineáris leképezésekhez hasonlóan a bilineáris függvény mátrixa is erősen bázisfüggő: más bázist választva általában a mátrix is egészen más lesz.

Példa: Bilineáris függvény értéke mátrixszorzással

Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektorteret a szokásos $E = \{e_1, e_2\}$ bázissal. Legyen $\mathbf{A}$ egy bilineáris függvény, amelynek mátrixa ebben a bázisban:

$$[\mathbf{A}]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ez a definíció szerint pontosan azt jelenti, hogy a bázisvektorokon felvett értékek a következők: $\mathbf{A}(e_1, e_1) = 1$, $\mathbf{A}(e_1, e_2) = 2$, $\mathbf{A}(e_2, e_1) = 3$, és $\mathbf{A}(e_2, e_2) = 4$.

Számítsuk ki a függvény értékét az $u = (1, 1)^T$ és $v = (1, -1)^T$ vektorokon! A függvény értékét kényelmesen kiszámolhatjuk az $\mathbf{A}(u, v) = u^T [\mathbf{A}]_E v$ mátrixszorzással (ahol u^T az u vektor sorvektor alakja):

$$\mathbf{A}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Először végezzük el a bal oldali vektor-mátrix szorzást:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \quad 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4) = (4 \quad 6)$$

Majd szorozzuk be az eredményt a jobb oldali oszlopvektorral:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) = 4 - 6 = -2$$

A bilineáris függvény értéke ezen a két vektoron tehát $\mathbf{A}(u, v) = -2$.

2. Példa: Számolás egy tetszőleges bázisban

Tekintsünk egy $\mathbf{A}$ bilineáris függvényt, és legyen $B = \{b_1, b_2\}$ egy tetszőleges bázis a V vektortérben. Tegyük fel, hogy a függvény mátrixa ebben a bázisban egy diagonális mátrix:

$$[\mathbf{A}]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ez a tétel alapján azt jelenti, hogy $\mathbf{A}(b_1, b_1) = 2$, $\mathbf{A}(b_2, b_2) = -3$, a "vegyes" értékelések pedig nullát adnak: $\mathbf{A}(b_1, b_2) = \mathbf{A}(b_2, b_1) = 0$.

Legyen u és v két vektor, amelyeknek ismerjük a B bázisra vonatkozó koordinátáit. (Figyelem: a mátrixszorzáshoz a vektorok B bázisbeli koordinátavektorait kell használnunk!)

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{azaz} \quad u = 2b_1 + 1b_2$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{azaz} \quad v = -1b_1 + 2b_2$$

A bilineáris függvény értéke most is az $\mathbf{A}(u, v) = [u]_B^T [\mathbf{A}]_B [v]_B$ mátrixszorzással számolható ki:

$$\mathbf{A}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Először szorozzuk össze a bal oldali sorvektort a mátrixszal:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \quad 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-3)) = (4 \quad -3)$$

Majd a kapott eredményt szorozzuk be a jobb oldali oszlopvektorral:

$$(4 \ -3) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 = -4 - 6 = -10$$

A függvény értéke ezen a két vektoron tehát $\mathbf{A}(u, v) = -10$.

Gyakorló feladatok önálló munkához

A) Feladat: Bilineáris függvény értéke adott bázisban

Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektorteret egy $B = \{b_1, b_2\}$ bázissal. Egy $\mathbf{A}$ bilineáris függvény mátrixa ebben a bázisban:

$$[\mathbf{A}]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Számítsa ki az $\mathbf{A}(u, v)$ értéket, ha a vektorok koordinátavektorai a rögzített B bázisban: $[u]_B = (3, -2)^T$ és $[v]_B = (-1, 5)^T$!

Megoldás. A függvény értékét a mátrixszorzásos képlettel számítjuk ki: $\mathbf{A}(u, v) = [u]_B^T [\mathbf{A}]_B [v]_B$.

Behelyettesítve a megadott értékeket:

$$\mathbf{A}(u, v) = (3 \ -2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Először elvégezzük a sorvektor és a mátrix szorzását:

$$(3 \ -2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = ((3 \cdot 2 + (-2) \cdot 4) \ (3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3)) = (-2 \ -9)$$

Majd az eredményt megszorozzuk az oszlopvektorral:

$$(-2 \ -9) \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = (-2) \cdot (-1) + (-9) \cdot 5 = 2 - 45 = -43$$

A bilineáris függvény értéke ezen a vektorpáron tehát -43 .

Gyakorló feladat: Számolás egy tetszőleges bázisban

Tekintsünk egy $\mathbf{A}$ bilineáris függvényt, és legyen $B = \{b_1, b_2\}$ egy tetszőleges bázis a V vektortérben. Tegyük fel, hogy a függvény mátrixa ebben a bázisban a következő (most nem diagonális) mátrix:

$$[\mathbf{A}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ez a tétel alapján azt jelenti, hogy $\mathbf{A}(b_1, b_1) = 1$, $\mathbf{A}(b_1, b_2) = 3$, $\mathbf{A}(b_2, b_1) = -2$, és $\mathbf{A}(b_2, b_2) = 4$.

Legyen u és v két vektor, amelyeknek ismerjük a B bázisra vonatkozó koordinátáit. (Figyelem: a mátrixszorzáshoz a vektorok B bázisbeli koordinátavektorait kell használnunk!)

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{azaz} \quad u = 2b_1 - 1b_2$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{azaz} \quad v = 3b_1 + 1b_2$$

A bilineáris függvény értéke most is az $\mathbf{A}(u, v) = [u]_B^T [\mathbf{A}]_B [v]_B$ mátrixszorzással számolható ki:

$$\mathbf{A}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Először szorozzuk össze a bal oldali sorvektort a mátrixszal:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Majd a kapott eredményt szorozzuk be a jobb oldali oszlopvektorral:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 12 + 2 = 14$$

A függvény értéke ezen a két vektoron tehát $\mathbf{A}(u, v) = 14$.

Tétel (Megfeleltetés függvények és mátrixok között)

Rögzített bázis mellett kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn a V vektortéren értelmezett bilineáris függvények és az $n \times n$ -es (valós) mátrixok között. Ha az u , illetve v vektor koordinátái az adott bázisban $u_1, u_2, \dots, u_n$, illetve $v_1, v_2, \dots, v_n$, akkor

$$\mathbf{A}(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} u_i v_j$$

vagy mátrixos felírásban $\mathbf{A}(u, v) = [u]^T [\mathbf{A}]_B [v]$, azaz részletesen:

$$\mathbf{A}(u, v) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

4. Feladat

Legyen V a legfeljebb 4-edfokú valós együtthatós polinomok (beleértve a 0 polinomot is) szokásos vektortere. Válasszuk ki az alábbi leképezések közül a bilineáris függvényeket, és írjuk fel a mátrixukat a szokásos bázisban! Legyen $f, g \in V$ képe:

a) $\mathbf{A}(f, g) = f \cdot g$

b) $\mathbf{A}(f, g) = f(1) + g(1)$

c) $\mathbf{A}(f, g) = f(1)g(2)$

d) $\mathbf{A}(f, g) = f'(1)g(2)$

Megoldás. A legfeljebb 4-edfokú polinomok vektortérének dimenziója 5. A szokásos bázis: $B = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$, ahol $e_i(x) = x^i$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$). A bilineáris függvény mátrixának elemei: $\alpha_{ij} = \mathbf{A}(e_i, e_j)$.

a) $\mathbf{A}(f, g) = f \cdot g$

Nem bilineáris függvény. A valós bilineáris függvény definíciója szerint a leképezésnek valós számot ($\mathbb{R}$) kell eredményeznie. Két polinom szorzata azonban egy újabb (akár 8-adfokú) polinom, nem pedig egy szám.

b) $\mathbf{A}(f, g) = f(1) + g(1)$

Nem bilineáris függvény. Nem teljesül rá a linearitás (pl. a skalárszoros kiemelése). Ha például az első változóját megszorozzuk 2-vel: $\mathbf{A}(2f, g) = 2f(1) + g(1)$. Ezzel szemben $2\mathbf{A}(f, g) = 2(f(1) + g(1)) = 2f(1) + 2g(1)$. A kettő nem egyenlő, így nem bilineáris.

c) $\mathbf{A}(f, g) = f(1)g(2)$

Bilineáris függvény. A behelyettesítés és a szorzás is lineáris művelet, és az eredmény egy valós szám. Számítsuk ki a mátrix elemeit: $\alpha_{ij} = e_i(1) \cdot e_j(2)$. Tudjuk, hogy $e_i(1) = 1^i = 1$ minden i -re. $e_j(2) = 2^j$, tehát az értékek: 1, 2, 4, 8, 16. Így $\alpha_{ij} = 1 \cdot 2^j = 2^j$. Mivel ez nem függ i -től, a mátrix minden sora megegyezik:

$$[\mathbf{A}]_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

d) $\mathbf{A}(f, g) = f'(1)g(2)$

Bilineáris függvény. A deriválás, a behelyettesítés és a szorzás is lineáris

műveletek. Számítsuk ki a mátrix elemeit: $\alpha_{ij} = e'_i(1) \cdot e_j(2)$. A bázisvektorok deriváltjai: $e'_i(x) = i \cdot x^{i-1}$. Ezt kiértékelve 1-ben: $e'_i(1) = i \cdot 1^{i-1} = i$. Tehát az első szorzótényező értékei $i = 0, 1, 2, 3, 4$ esetén rendre: $0, 1, 2, 3, 4$. A második szorzótényező az előző feladatból ismert 2^j . A mátrix eleme tehát $\alpha_{ij} = i \cdot 2^j$. A mátrix sorai (i) egyszerűen a $(1, 2, 4, 8, 16)$ vektor $0, 1, 2, 3, 4$ -szeresei lesznek:

$$[\mathbf{A}]_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 6 & 12 & 24 & 48 \\ 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \end{pmatrix}$$

A bilineáris függvény értékkészlete

Feladat Mi lehet egy valós bilineáris függvény értékkészlete (azaz a felvett értékeinek halmaza)?

Válasz: Egy $\mathbf{A} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ valós bilineáris függvény értékkészlete ($\text{Im } \mathbf{A}$) kizárólag kétféle halmaz lehet:

1. Csak a nullából álló egyelemű halmaz: $\{0\}$ (ez a triviális zérőfüggvény).
2. A teljes valós számhalmaz: $\mathbb{R}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ nem a konstans nulla függvény. Ekkor létezik legalább egy olyan (u, v) vektorpár a térben, amelyre a függvény értéke nem nulla. Jelöljük ezt az értéket c -vel, ahol $c \neq 0$, azaz $\mathbf{A}(u, v) = c$.

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós szám. A bilineáris függvény első változójában való homogenitása miatt (a definíció alapján) kiemelhetjük a λ szorzót:

$$\mathbf{A}(\lambda u, v) = \lambda \cdot \mathbf{A}(u, v) = \lambda \cdot c$$

Mivel c egy rögzített, nullától különböző valós szám, ahogy a λ paraméter végigfut a teljes valós számhalmazon ($\mathbb{R}$), úgy a $\lambda \cdot c$ szorzat is felvesz minden lehetséges valós értéket.

Ezzel beláttuk, hogy amint a függvény értékkészlete tartalmaz egy nullától különböző elemet, a linearitás miatt a teljes $\mathbb{R}$ tengelyt "kifeszíti". $\square$

Feladat

Legyen V egy bázisa $b_1, b_2, \dots, b_n$. Hogyan változik egy $\mathbf{A}$ bilineáris függvény mátrixa, ha a b_1 és b_2 bázisvektorokat felcseréljük?

Megoldás. Jelöljük az eredeti bázist B -vel. Ekkor a mátrix elemei definíció szerint: $\alpha_{ij} = \mathbf{A}(b_i, b_j)$.

Az új bázisunk $B' = \{b_2, b_1, b_3, \dots, b_n\}$. Az egyszerűség kedvéért jelöljük az új bázis elemeit b'_i -vel, ahol tehát: $b'_1 = b_2$, $b'_2 = b_1$, és $b'_k = b_k$ minden $k \geq 3$ esetén.

Az új, $[\mathbf{A}]_{B'}$ mátrix elemei $\alpha'_{ij} = \mathbf{A}(b'_i, b'_j)$ lesznek. Számítsuk ki a bal felső 2×2 -es blokk elemeit az új bázisban:

- $\alpha'_{11} = \mathbf{A}(b'_1, b'_1) = \mathbf{A}(b_2, b_2) = \alpha_{22}$
- $\alpha'_{12} = \mathbf{A}(b'_1, b'_2) = \mathbf{A}(b_2, b_1) = \alpha_{21}$
- $\alpha'_{21} = \mathbf{A}(b'_2, b'_1) = \mathbf{A}(b_1, b_2) = \alpha_{12}$
- $\alpha'_{22} = \mathbf{A}(b'_2, b'_2) = \mathbf{A}(b_1, b_1) = \alpha_{11}$

Látható, hogy a főátló első két eleme helyet cserélt, a mellékátló elemei pedig tükrözödtek. Nézzük meg, mi történik a többi elemmel ($k \geq 3$):

- Az új 1. sor elemei: $\alpha'_{1k} = \mathbf{A}(b'_1, b'_k) = \mathbf{A}(b_2, b_k) = \alpha_{2k}$ (ez a régi 2. sor).
- Az új 2. sor elemei: $\alpha'_{2k} = \mathbf{A}(b'_2, b'_k) = \mathbf{A}(b_1, b_k) = \alpha_{1k}$ (ez a régi 1. sor).
- Ugyanez történik az oszlopoknál is, hiszen $\mathbf{A}(b'_k, b'_1) = \alpha_{k2}$ és $\mathbf{A}(b'_k, b'_2) = \alpha_{k1}$.

Következtetés: A bilineáris függvény mátrixa úgy változik, hogy az eredeti mátrixban fel kell cserélni az 1. és a 2. sort, valamint az 1. és a 2. oszlopot is. (A sor- és oszlopcsere elvégzésének sorrendje tetszőleges, a végeredmény ugyanaz lesz).

Ortogonalizálás

Legyen V továbbra is egy véges dimenziós vektortér a valós test $(\mathbb{R})$ fölött. Most azt vizsgáljuk, mikor létezik egy $\mathbf{A}$ bilineáris függvénynek „szép” mátrixa, nevezetesen: mely $\mathbf{A}$ -khoz található olyan bázis, amelyben $\mathbf{A}$ mátrixa diagonális (azaz a főátlón kívül minden elem nulla)?

Kiderül, hogy a lineáris transzformációknál tapasztaltakhoz képest itt jóval kedvezőbb a helyzet. Könnyen adódik az az egyszerű szükséges feltétel, hogy az $\mathbf{A}$ függvény szimmetrikus legyen. Meglepő módon ez egyben elégséges feltétel is a diagonalizálhatósághoz.

Definíció

Egy $\mathbf{A}$ bilineáris függvény szimmetrikus, ha minden $u, v \in V$ -re $\mathbf{A}(u, v) = \mathbf{A}(v, u)$.

Tétel

Egy $\mathbf{A}$ bilineáris függvény akkor és csak akkor szimmetrikus, ha (akármelyik bázisban felírt) mátrixa szimmetrikus (azaz megegyezik a transzponáltjával).

Most rátérünk a diagonalizálhatóság kérdésére. Először tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ -nak létezik diagonális mátrixa. Mivel egy diagonális mátrix eleve szimmetrikus, így (az előző tétel alapján) ekkor $\mathbf{A}$ -nak mindenestre szimmetrikusnak kell lennie. Mint a bevezetőben már említettük, a megfordítás is igaz:

Tétel

Legyen $\mathbf{A}$ szimmetrikus bilineáris függvény V -n. Ekkor létezik olyan bázis, amelyben $\mathbf{A}$ mátrixa diagonális.

A diagonális mátrix pontosan azt jelenti, hogy a szóban forgó $c_1, \dots, c_n$ bázisban $\mathbf{A}(c_i, c_j) = 0$, ha $i \neq j$. Ha speciálisan a bilineáris függvény a sík- vagy térvektorok szokásos skalárszorzata, akkor $\mathbf{A}(u, v) = 0$ azt jelenti, hogy u és v egymásra merőlegesek, vagy — görög-latin eredetű szóval — ortogonálisak. Ennek általánosítása a következő:

Definíció

Legyen $\mathbf{A}$ szimmetrikus bilineáris függvény. Az $u, v \in V$ vektorok $\mathbf{A}$ -ortogonálisak, ha $\mathbf{A}(u, v) = 0$.

Ennek alapján az előző tételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy $\mathbf{A}$ szimmetrikus bilineáris függvényhez mindig található $\mathbf{A}$ -ortogonális bázis.

Feladat

Legyen $V = \mathbb{R}^3$, az u , illetve v vektor komponenseit jelölje u_1, u_2, u_3 , illetve v_1, v_2, v_3 . Keressünk $\mathbf{A}$ -ortogonális bázist és diagonális mátrixot a következő szimmetrikus bilineáris függvényhez:

$$\mathbf{A}(u, v) = 4u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 2u_1v_3 + 2u_3v_1 + 2u_2v_3 + 2u_3v_2$$

Megoldás. Először írjuk fel a bilineáris függvény mátrixát a szokásos bázisban (E). A megadott $\mathbf{A}(u, v)$ képlet alapján az elemeket az együtthatókból kapjuk (emlékezzünk, hogy $i \neq j$ esetén az együttható a szimmetria miatt megoszlik, pl. $2u_1v_2 + 2u_2v_1$ miatt $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 2$):

$$[\mathbf{A}]_E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A szimmetrikus bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak:

$$q(x) = \mathbf{A}(x, x) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Alkalmazzuk a Lagrange-féle teljes négyzetté kiegészítés módszerét! Emeljük ki az x_1 -et tartalmazó tagokból a 4-et:

$$q(x) = 4(x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3) + 4x_2x_3 = 4\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 4x_2x_3$$

Összevonva a maradék tagokat:

$$q(x) = 4\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2 = 4\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - (x_2 - x_3)^2$$

Vezessünk be új változókat (y_1, y_2, y_3):

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

$$y_2 = x_2 - x_3$$

$$y_3 = x_3$$

Ezekkel az új változókkal a kvadratikus alak diagonális: $q(y) = 4y_1^2 - y_2^2 + 0y_3^2$. A diagonális mátrix tehát a változók együtthatóiból áll:

$$[\mathbf{A}]_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az $\mathbf{A}$ -ortogonális bázis ($B = \{b_1, b_2, b_3\}$) vektorait úgy kapjuk meg, ha az új változókat visszafejtjük, és kifejezzük az x_1, x_2, x_3 változókat az y_1, y_2, y_3 függvényében:

$$x_3 = y_3$$

$$x_2 = y_2 + x_3 = y_2 + y_3$$

$$x_1 = y_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = y_1 - \frac{1}{2}(y_2 + y_3) - \frac{1}{2}y_3 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 - y_3$$

A bázisvektorokat az egyenletek y_1, y_2, y_3 szerinti együtthatói adják (az átmenet-mátrix oszlopai):

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ezek a vektorok alkotják a keresett $\mathbf{A}$ -ortogonális bázist.

Megoldás (Alternatív megoldás: Gram-Schmidt ortogonalizációval). A Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárás a bilineáris függvényeknél arról szól, hogy egy eredeti bázist lépésről lépésre úgy "korrigálunk", hogy a végén mindegyik vektor $\mathbf{A}$ -ortogonális legyen egymásra (azaz a függvény értéke bármely két különböző vektorra 0 legyen).

Az alapok: Mit tudunk?

A kiindulási pont a szokásos bázis (az x, y, z tengelyek irányvektorai):

- $b_1 = (1, 0, 0)^T$
- $b_2 = (0, 1, 0)^T$
- $b_3 = (0, 0, 1)^T$

Az $\mathbf{A}(u, v)$ képletünk:

$$\mathbf{A}(u, v) = 4u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 2u_1v_3 + 2u_3v_1 + 2u_2v_3 + 2u_3v_2$$

1. Lépés: Az első vektor (c_1)

A Gram-Schmidt eljárás úgy indul, hogy az első vektort megtartjuk eredeti formájában:

$$c_1 = b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Számítsuk ki a függvény értékét ezen az első vektoron önmagával ($u = c_1$ és $v = c_1$). A képletbe helyettesítve csak az u_1 és v_1 nem nulla, az összes többi tag kiesik:

$$\mathbf{A}(c_1, c_1) = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

2. Lépés: A második vektor (c_2) meghatározása

A b_2 vektort "korrigáljuk" a c_1 vektorral egy p_{21} szorzó segítségével:

$$c_2 = b_2 + p_{21}c_1$$

Olyan p_{21} -et keresünk, amelyre teljesül az ortogonalitás: $\mathbf{A}(c_2, c_1) = 0$. Bontsuk fel ezt az elvárást a bilineáris függvény linearitása szerint:

$$\mathbf{A}(c_2, c_1) = \mathbf{A}(b_2 + p_{21}c_1, c_1) = \mathbf{A}(b_2, c_1) + p_{21}\mathbf{A}(c_1, c_1) = 0$$

- $\mathbf{A}(b_2, c_1)$: Behelyettesítve az $u = (0, 1, 0)^T$ és $v = (1, 0, 0)^T$ vektorokat, csak a $2u_2v_1$ tag marad meg: $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$.
- $\mathbf{A}(c_1, c_1) = 4$ (az előző lépésből).

Helyettesítsük be ezeket az egyenletbe:

$$2 + p_{21} \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4p_{21} = -2 \quad \Rightarrow \quad p_{21} = -\frac{1}{2}$$

Tehát a második vektorunk:

$$c_2 = b_2 - \frac{1}{2}c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Lépés: A harmadik vektor (c_3) meghatározása

A harmadik vektornál az eredeti b_3 -at korrigáljuk az első (c_1) és a második (c_2) vektorral is, hogy mindkettőre ortogonális legyen:

$$c_3 = b_3 + p_{31}c_1 + p_{32}c_2$$

Két feltételünk van:

1. $\mathbf{A}(c_3, c_1) = 0$ (ebből kapjuk p_{31} -et)

2. $\mathbf{A}(c_3, c_2) = 0$ (ebből kapjuk p_{32} -t)

Nézzük az első feltételt:

$$\mathbf{A}(b_3, c_1) + p_{31}\mathbf{A}(c_1, c_1) = 0$$

A képlet alapján $\mathbf{A}(b_3, c_1) = 2$ (csak a $2u_3v_1$ marad meg). Így:

$$2 + p_{31} \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{31} = -\frac{1}{2}$$

Nézzük a második feltételt:

$$\mathbf{A}(b_3, c_2) + p_{32}\mathbf{A}(c_2, c_2) = 0$$

Behelyettesítve az $u = b_3 = (0, 0, 1)^T$ és $v = c_2 = (-1/2, 1, 0)^T$ vektorokat a képletbe, kapjuk, hogy $\mathbf{A}(b_3, c_2) = 1$. Az $\mathbf{A}(c_2, c_2)$ értéke pedig -1 .

$$1 + p_{32} \cdot (-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{32} = 1$$

Így a harmadik vektor összeáll:

$$c_3 = b_3 - \frac{1}{2}c_1 + 1 \cdot c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Végül a kapott diagonális mátrix főátlójába az $\mathbf{A}(c_1, c_1) = 4$, az $\mathbf{A}(c_2, c_2) = -1$ és az $\mathbf{A}(c_3, c_3) = 0$ értékeket írjuk be:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tétel és Algoritmus: A Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárás

Tétel: Minden véges dimenziós vektortéren megadott szimmetrikus bilineáris függvényhez megkonstruálható egy $\mathbf{A}$ -ortogonális bázis a Gram-Schmidt eljárás segítségével (feltéve, hogy az eljárás során a normáláskor fellépő $\mathbf{A}(c_i, c_i)$ skalárok nem nullák).

Az eljárás lépései:

Legyen V egy n -dimenziós vektortér, és induljunk ki egy tetszőleges $b_1, b_2, \dots, b_n$ bázisból. Az új, $\mathbf{A}$ -ortogonális $c_1, c_2, \dots, c_n$ bázist lépcsőről lépésre építjük fel:

1. **Első vektor:** Az első bázisvektort változtatás nélkül megtartjuk:

$$c_1 = b_1$$

2. **Második vektor:** A második vektort úgy keressük, hogy az $\mathbf{A}$ -ortogonális legyen az elsőre:

$$c_2 = b_2 + p_{21}c_1$$

Ahol a p_{21} együtthatót az $\mathbf{A}(c_2, c_1) = 0$ feltételből fejezzük ki.

3. **Általános (k -adik) vektor:** A k -adik vektort az eredeti b_k vektor és az addig megkonstruált $c_1, \dots, c_{k-1}$ vektorok lineáris kombinációjaként állítjuk elő:

$$c_k = b_k + p_{k1}c_1 + p_{k2}c_2 + \dots + p_{k,k-1}c_{k-1}$$

Ahol a p_{ki} együtthatókat abból az egyenletrendszerből kapjuk, amelyeket az $\mathbf{A}(c_k, c_i) = 0$ (minden $i = 1, 2, \dots, k-1$ esetén) feltételek adnak.

Megjegyzés: Az így kapott $c_1, c_2, \dots, c_n$ vektorrendszer a téren egy $\mathbf{A}$ -ortogonális bázist alkot. Ebben az új bázisban a bilineáris függvény mátrixa diagonális lesz, és a főátló elemei pontosan az $\mathbf{A}(c_i, c_i)$ értékek lesznek.

Feladat

Legyen S a szokásos skalárszorzat $\mathbb{R}^4$ -ben. Jelölje egy általános $u \in \mathbb{R}^4$ vektor komponenseit u_1, u_2, u_3, u_4 . Adjunk meg S -ortogonális bázist $\mathbb{R}^4$ alábbi alterén:

a) $U = \{u \mid u_1 = u_4\}$

Megoldás. Az U altérbe azok a vektorok tartoznak, amelyeknek az első és az utolsó (negyedik) koordinátája megegyezik. Egy tetszőleges $u \in U$ vektor általános alakja tehát:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_1 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebből azonnal látszik, hogy az U altér dimenziója 3, és a fenti felbontás természetes módon ad egy bázist:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mivel a feladat egy **S -ortogonális bázis** megtalálása (ahol S a szokásos skalárszorzat), ellenőriznünk kell ezeknek a vektoroknak a páronkénti skalárszorzatát. A szokásos skalárszorzat a megfelelő koordináták szorzatának összege:

- $S(b_1, b_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$
- $S(b_1, b_3) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$
- $S(b_2, b_3) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$

Mivel a vektorok páronként merőlegesek egymásra, így szerencsénk van: a legkézenfekvőbb módon felírt bázis eleve ortogonális! (Ha nem így lett volna, most kellene alkalmaznunk a Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárást ezekre a vektorokra).

A keresett S -ortogonális bázis tehát:

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Feladat

Legyen V a legfeljebb 4-edfokú valós együtthatós polinomok (beleértve a 0 polinomot is) szokásos vektortere. Írjuk fel az alábbi szimmetrikus bilineáris függvény egy diagonális mátrixát, és adjunk is meg egy $\mathbf{A}$ -ortogonális bázist.

$$\mathbf{A}(f, g) = f(1)g(1)$$

Megoldás. A vektortér dimenziója 5, hiszen egy általános legfeljebb 4-edfokú polinom felírásához 5 paraméter kell: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Tehát 5 darab bázisvektorra (polinomra) lesz szükségünk.

1. A bilineáris függvény elemzése:

A megadott $\mathbf{A}(f, g) = f(1)g(1)$ függvény nagyon speciális. Ahhoz, hogy két polinom $\mathbf{A}$ -ortogonális legyen egymásra, az kell, hogy:

$$\mathbf{A}(f, g) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(1)g(1) = 0$$

Ez azt jelenti, hogy a szorzat csak akkor nulla, ha legalább az egyik polinom az $x = 1$ helyen 0 értéket vesz fel (azaz az 1 gyöke a polinomnak).

Ha egy $\mathbf{A}$ -ortogonális bázist $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4)$ keresünk, akkor bármely $i \neq j$ esetén $c_i(1)c_j(1) = 0$ kell, hogy teljesüljön. Ez csak úgy lehetséges, ha legfeljebb az egyik bázispolinom behelyettesítési értéke nem nulla az $x = 1$ helyen, a többi mind nullát ad!

2. Az $\mathbf{A}$ -ortogonális bázis megkonstruálása okos választással:

Építsük fel a bázisunkat ennek a felismerésnek a birtokában!

Legyen az első polinomunk egy olyan egyszerű polinom, ami nem nulla az $x = 1$ helyen. A legkézenfekvőbb választás az azonosan 1 konstans polinom:

$$c_0(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad c_0(1) = 1$$

A többi négy polinomnak olyannak kell lennie, hogy $c_i(1) = 0$ teljesüljön rájuk, és együtt a c_0 -val lineárisan független rendszert (így bázist) alkossanak. Mik a legegyszerűbb polinomok, amiknek az 1 gyöke?

$$\begin{array}{ll} c_1(x) = x - 1 & \Rightarrow \quad c_1(1) = 0 \\ c_2(x) = x^2 - 1 & \Rightarrow \quad c_2(1) = 0 \\ c_3(x) = x^3 - 1 & \Rightarrow \quad c_3(1) = 0 \\ c_4(x) = x^4 - 1 & \Rightarrow \quad c_4(1) = 0 \end{array}$$

Ezek a polinomok különböző fokszámúak, így garantáltan lineárisan függetlenek. A c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 rendszer tehát egy bázist alkot V -ben. Mivel a $c_1, \dots, c_4$ polinomok mind nullát adnak az $x = 1$ helyen, a páronkénti $\mathbf{A}(c_i, c_j)$ szorzatok garantáltan nullák lesznek. Kaptunk egy $\mathbf{A}$ -ortogonális bázist!

3. A diagonális mátrix felírása:

A diagonális mátrix főátlójában a báziselemek önmagukkal vett $\mathbf{A}$ értékei (a kvadratikus alak értékei) állnak:

- $\mathbf{A}(c_0, c_0) = c_0(1) \cdot c_0(1) = 1 \cdot 1 = 1$
- $\mathbf{A}(c_1, c_1) = c_1(1) \cdot c_1(1) = 0 \cdot 0 = 0$
- $\mathbf{A}(c_2, c_2) = c_2(1) \cdot c_2(1) = 0 \cdot 0 = 0$
- $\mathbf{A}(c_3, c_3) = c_3(1) \cdot c_3(1) = 0 \cdot 0 = 0$
- $\mathbf{A}(c_4, c_4) = c_4(1) \cdot c_4(1) = 0 \cdot 0 = 0$

A szimmetrikus bilineáris függvény diagonális mátrixa ebben a bázisban tehát egy 5×5 -ös mátrix:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Feladat: Ortogonális bázis polinomok terén (folytatás)

b) Írjuk fel az alábbi szimmetrikus bilineáris függvény egy diagonális mátrixát, és adjunk is meg egy $\mathbf{A}$ -ortogonális bázist.

$$\mathbf{A}(f, g) = \text{az } x^2 \text{ együtthatója az } f(x)g(x) \text{ polinomban}$$

Megoldás. 1. A bilineáris függvény kifejtése:

Írjuk fel a két általános legfeljebb 4-edfokú polinomot a szokásos $E = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ bázisban:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \end{aligned}$$

Szorozzuk össze a két polinomot, de fókuszáljunk kizárólag azokra a tagokra, amelyekből x^2 keletkezik! Ezt háromféleképpen kaphatunk:

- Konstans szorozva másodfokúval: $a_0 \cdot b_2x^2$ és $a_2x^2 \cdot b_0$
- Elsőfokú szorozva elsőfokúval: $a_1x \cdot b_1x$

Minden más szorzat (pl. amiben x^3 vagy x^4 szerepel) legalább harmadfokú lesz, így nem ad az x^2 együtthatójához semmit. A bilineáris függvényünk tehát pontosan így néz ki:

$$\mathbf{A}(f, g) = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$$

2. A függvény mátrixa a szokásos bázisban:

A fenti képlet alapján felírhatjuk az $\mathbf{A}$ mátrixát a szokásos bázisban. Csak az a_0b_2 , a_1b_1 és a_2b_0 pozíciókban lesz 1-es, mindenhol máshol 0. Mivel a 3. és 4. fokú tagok együtthatói (a_3, a_4, b_3, b_4) nem is szerepelnek a képletben, az ezekhez tartozó sorok és oszlopok csupa nullák lesznek:

$$[\mathbf{A}]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Az $\mathbf{A}$ -ortogonális bázis megkonstruálása:

A mátrix alapján könnyen "kitalálhatjuk" a diagonális alakot adó bázist (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4):

- A harmad- és negyedfokú tagok eleve "láthatatlanok" a függvény számára, hiszen mindennel vett $\mathbf{A}$ -szorzatuk 0. Így ezek maradhatnak a bázisban:

$$c_3(x) = x^3 \quad \text{és} \quad c_4(x) = x^4$$

$$\text{Itt } \mathbf{A}(c_3, c_3) = 0 \text{ és } \mathbf{A}(c_4, c_4) = 0.$$

- Az x is már önmagában jó, hiszen csak önmagával szorozva ad x^2 -et, a többivel (pl. konstanssal) nem.

$$c_1(x) = x$$

$$\text{Itt } \mathbf{A}(c_1, c_1) = 1.$$

- *A gondot az 1 és az x^2 "vegyes" szorzatai okozzák (a mátrix sarkaiban lévő egyesek). Ezt a szokásos "összeg-különbség" trükkel tudjuk szétválasztani: vegyük az $1 + x^2$ és $1 - x^2$ polinomokat!*

$$c_0(x) = 1 + x^2 \quad \text{és} \quad c_2(x) = 1 - x^2$$

Nézzük meg ezek önmagukkal vett szorzatát:

$$\begin{aligned} (1 + x^2)(1 + x^2) &= 1 + 2x^2 + x^4 &\Rightarrow \mathbf{A}(c_0, c_0) &= 2 \\ (1 - x^2)(1 - x^2) &= 1 - 2x^2 + x^4 &\Rightarrow \mathbf{A}(c_2, c_2) &= -2 \end{aligned}$$

És egymással vett szorzatukat (ortogonalitás ellenőrzése):

$$(1 + x^2)(1 - x^2) = 1 - x^4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}(c_0, c_2) = 0$$

4. A végeredmény:

A talált $\mathbf{A}$ -ortogonális bázis tehát:

$$B' = \{1 + x^2, x, 1 - x^2, x^3, x^4\}$$

A bilineáris függvény diagonális mátrixa ebben az új bázisban az $\mathbf{A}(c_i, c_i)$ értékekből áll:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tétel

Bármely $\mathbf{A}$ szimmetrikus bilineáris függvénynek létezik olyan mátrixa, amelyben a főátló elemei csak az 1 , a -1 és a 0 közül kerülhetnek ki, a főátlón kívül pedig minden elem 0 .

Az ilyen mátrixot adó bázisban a bilineáris függvény az $\mathbf{A}(u, v) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i v_i$ alakra egyszerűsödik, ahol $\varepsilon_i = \pm 1$ vagy 0 , és $u_1, \dots, u_n$, illetve $v_1, \dots, v_n$ az u , illetve v vektorok koordinátáit jelölik.

Feladatok

Kvadratikus alak

Definíció

Az $\tilde{A}(x) = \mathbf{A}(x, x) : V \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $\mathbf{A}$ bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alaknak nevezzük.

A kvadratikus alak tehát tulajdonképpen a bilineáris függvény egy megszorítása, amikor mindkét változó helyére azonos vektort írunk. így minden kvadratikus alak valamilyen bilineáris függvényből származik

Most a kvadratikus alakok különböző típusainak az áttekintésére térünk rá. Bármely kvadratikus alakra $\tilde{A}(0) = 0$. A többi vektoron felvett értékektől függően a nem azonosan nulla kvadratikus alakokat (és ennek alapján a szimmetrikus bilineáris függvényeket) a következőképpen osztályozzuk:

Definíció

Az $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ szimmetrikus bilineáris függvényhez tartozó $\tilde{A}$ kvadratikus alak:

- (PD) **pozitív definit**, ha minden $x \neq 0$ -ra $\tilde{A}(x) > 0$;
- (ND) **negatív definit**, ha minden $x \neq 0$ -ra $\tilde{A}(x) < 0$;
- (PSZ) **pozitív szemidefinit**, ha minden x -re $\tilde{A}(x) \geq 0$, és van olyan $x \neq 0$, hogy $\tilde{A}(x) = 0$;
- (NSZ) **negatív szemidefinit**, ha minden x -re $\tilde{A}(x) \leq 0$, és van olyan $x \neq 0$, hogy $\tilde{A}(x) = 0$; és végül
- (I) **indefinit**, ha $\tilde{A}(x)$ felvesz pozitív és negatív értéket is.

A kvadratikus alak jellege igen egyszerűen leolvasható a bilineáris függvény diagonális mátrixából:

Tétel

Tekintsük az $\mathbf{A}$ szimmetrikus bilineáris függvény egy diagonális mátrixát. Ekkor $\mathbf{A}$ (illetve $\tilde{A}$) pontosan akkor:

- azonosan nulla, ha a főátló minden eleme nulla;
- pozitív definit, ha a főátló minden eleme pozitív;
- negatív definit, ha a főátló minden eleme negatív;
- pozitív szemidefinit, ha a főátlóban van pozitív és nulla elem is, de negatív nincs;
- negatív szemidefinit, ha a főátlóban van negatív és nulla elem is, de pozitív nincs;
- indefinit, ha a főátlóban van pozitív és negatív elem is.

Feladatok

1. Igazoljuk, hogy a szimmetrikus bilineáris függvények és a kvadratikus alakok között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat áll fenn.

Bizonyítás. A definíció alapján egy $\mathbf{A}$ szimmetrikus bilineáris függvény egyértelműen meghatározza az $\tilde{A}(x) = \mathbf{A}(x, x)$ kvadratikus alakot. A tétel igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy ez visszafelé is igaz: az $\tilde{A}$ kvadratikus alak ismeretében egyértelműen kiszámítható az eredeti $\mathbf{A}(x, y)$ szimmetrikus bilineáris függvény értéke bármely $x, y \in V$ vektorpárra.

Tekintsük az $\tilde{A}(x + y)$ kifejezést, és fejtsük ki a bilineáris függvény tulajdonságai (linearitás) alapján:

$$\tilde{A}(x + y) = \mathbf{A}(x + y, x + y) = \mathbf{A}(x, x) + \mathbf{A}(x, y) + \mathbf{A}(y, x) + \mathbf{A}(y, y)$$

Mivel az $\mathbf{A}$ függvény szimmetrikus, tudjuk, hogy $\mathbf{A}(x, y) = \mathbf{A}(y, x)$. Alkalmazva továbbá a kvadratikus alak definícióját a megfelelő tagokra ($\tilde{A}(x) = \mathbf{A}(x, x)$ és $\tilde{A}(y) = \mathbf{A}(y, y)$), az egyenlet a következőképpen alakul:

$$\tilde{A}(x + y) = \tilde{A}(x) + 2\mathbf{A}(x, y) + \tilde{A}(y)$$

Ebből az egyenlőségből algebrai átrendezéssel kifejezhetjük a keresett $\mathbf{A}(x, y)$ értéket:

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{1}{2} \left[\tilde{A}(x + y) - \tilde{A}(x) - \tilde{A}(y) \right]$$

Ezt az összefüggést **polarizációs azonosságnak** nevezzük. Mivel az $\mathbf{A}(x, y)$ értéket kizárólag a kvadratikus alak segítségével állítottuk elő, az állítást igazoltuk. $\square$

Feladat

Legyen $\tilde{A}$ az $\mathbf{A}$ szimmetrikus bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak.

a) Hogyan kaphatjuk meg $\tilde{A}(\lambda x)$ értékét $\tilde{A}(x)$ -ből?

Megoldás. A definíció szerint a kvadratikus alak a szimmetrikus bilineáris függvény önmagával vett értéke:

$$\tilde{A}(x) = \mathbf{A}(x, x)$$

Helyettesítsük be a λx vektort ebbe a definícióba:

$$\tilde{A}(\lambda x) = \mathbf{A}(\lambda x, \lambda x)$$

Mivel az $\mathbf{A}$ egy bilineáris függvény, mindkét változójában lineáris. Ez azt jelenti, hogy a skaláris szorzók (λ) kiemelhetők az első és a második argumentumból is:

1. Kiemeljük a λ -t az első argumentumból:

$$\mathbf{A}(\lambda x, \lambda x) = \lambda \mathbf{A}(x, \lambda x)$$

2. Kiemeljük a λ -t a második argumentumból is:

$$\lambda \mathbf{A}(x, \lambda x) = \lambda \cdot \lambda \mathbf{A}(x, x) = \lambda^2 \mathbf{A}(x, x)$$

Visszaírva a definíciót ($\mathbf{A}(x, x) = \tilde{A}(x)$), megkapjuk a végeredményt:

$$\tilde{A}(\lambda x) = \lambda^2 \tilde{A}(x)$$

Összefoglalva: Egy kvadratikus alakba írt vektor λ -szorosra nyújtása a kvadratikus alak értékét a λ **négyzetével** szorozza meg. Részben pontosan ez a tulajdonság az oka annak, hogy ezeket a függvényeket "kvadratikus" (azaz négyzetes) alakoknak nevezzük!

Feladat: Kvadratikus alakok előjeles négyzetösszegé alakítása

Hozzuk a következő 3-dimenziós kvadratikus alakokat előjeles négyzetösszeg (diagonális) alakra:

a) $q(x) = x_1x_2$

b) $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3$

c) $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

d) $q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

e) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Megoldás. a) $q(x) = x_1x_2$

Mivel nincs tisztán négyzetes tag, alkalmazzuk a szokásos segéd-helyettesítést. Legyen:

$$x_1 = y_1 + y_2 \quad \text{és} \quad x_2 = y_1 - y_2$$

(A harmadik változó egyszerűen $x_3 = y_3$, bár itt nem is szerepel). Behelyettesítve:

$$q(y) = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = \mathbf{y}_1^2 - \mathbf{y}_2^2$$

Ezzel meg is kaptuk az előjeles négyzetösszeget.

b) $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3$

Emeljük ki x_2 -t: $q(x) = x_2(x_1 + x_3)$. Ezt egyetlen szorzatként foghatjuk fel. Alkalmazzuk újra a fenti trükköt, de most a két "tényező" a x_2 és az $(x_1 + x_3)$. Legyen:

$$y_1 = \frac{(x_1 + x_3) + x_2}{2} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$
$$y_2 = \frac{(x_1 + x_3) - x_2}{2} = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

Ezekkel az új változókkal az $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ azonosság alapján:

$$q(y) = \mathbf{y}_1^2 - \mathbf{y}_2^2$$

c) $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

Szintén nincsenek négyzetes tagok. Vezessünk be új változókat az x_1 és x_2 szétválasztására:

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2, \quad x_3 = y_3$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} q(y) &= (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)y_3 + y_3(y_1 + y_2) \\ &= y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + y_1y_3 + y_2y_3 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 \end{aligned}$$

Most egészítsük ki teljes négyzetté az y_1 -et tartalmazó tagokat ($y_1^2 + 2y_1y_3$):

$$y_1^2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_3^2$$

Visszaírva:

$$q = (y_1 + y_3)^2 - y_3^2 - y_2^2$$

Vezessük be a végső változókat: $z_1 = y_1 + y_3$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$.

$$q(z) = \mathbf{z}_1^2 - \mathbf{z}_2^2 - \mathbf{z}_3^2$$

d) $q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

Itt van négyzetes tag (x_1^2), így egyből kezdhethetjük a kiegészítést. Gyűjtsük össze az x_1 -et tartalmazó tagokat:

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3$$

Helyettesítsük ezt be az eredeti kifejezésbe, és vonjuk össze a maradékot:

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 \underbrace{-x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3}_{\text{kompenzáció}} \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2 \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a maradék tagok pontosan kiadnak egy teljes négyzetet:

$$-4x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2 = -(4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2) = -(2x_2 + x_3)^2$$

Így a végső alak ($y_1 = x_1 - x_2 + x_3$ és $y_2 = 2x_2 + x_3$ választással):

$$q(y) = \mathbf{y}_1^2 - \mathbf{y}_2^2$$

e) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Gyűjtsük ki az x_1 -es tagokat:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3$$

Helyettesítsük vissza:

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \end{aligned}$$

Most egészítsük ki az x_2 -t tartalmazó részt (kiemeljük a -3 -at):

$$-3 \left(x_2^2 + \frac{2}{3}x_2x_3 \right) = -3 \left(\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 \right)^2 - \frac{1}{9}x_3^2 \right) = -3 \left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 \right)^2 + \frac{1}{3}x_3^2$$

Ezt visszaírva és összevonva a megmaradt $2x_3^2$ -tel:

$$q(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3 \left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 \right)^2 + \frac{7}{3}x_3^2$$

Új változókat bevezetve ($y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 + \frac{1}{3}x_3$, $y_3 = x_3$):

$$q(y) = \mathbf{y}_1^2 - 3\mathbf{y}_2^2 + \frac{7}{3}\mathbf{y}_3^2$$