

Euklideszi terek

Lineáris algebra

Euklideszi terek

Eddig a vektorterekben csak az összeadást és a skalárral való szorzást ismertük. Nem volt eszközünk arra, hogy megmérjük egy vektor "hosszát", vagy két vektor "hajlásszögét". Ezt a hiányosságot pótolja a skalárszorzat bevezetése, amely visszahozza a klasszikus geometriát az absztrakt terekbe.

Definíció

Euklideszi térnek nevezünk egy olyan (valós) V vektorteret, amely el van látva egy skalárszorzattal (más néven belső szorzattal).

Definíció: Skalárszorzat (koordinátás alak)

Legyen $e_1, \dots, e_n$ egy rögzített bázis a V vektortérben. Ekkor az adott bázis szerint vett **skalárszorzat**on (más szóhasználat: skaláris szorzaton, belső szorzaton) azt az $\mathbf{S} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értjük, amely két vektorhoz a koordinátáik szorzatösszegét rendeli.

Két vektor skalárszorzatát a középük írt ponttal fogjuk jelölni:

$$\mathbf{S}(\underline{x}, \underline{z}) = \underline{x} \cdot \underline{z} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n x_j z_j$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ez valójában egy nagyon speciális bilineáris függvény! Ha felírnánk a mátrixát a szokásos bázisban, az pontosan az egységmátrix (egy diagonális mátrix, csupa 1-essel a főátlóban) lenne.

Definíció: Ortonormált rendszer és bázis

Az $e_1, \dots, e_n$ vektorokat **ortonormált rendszernek** nevezzük, ha páronként merőlegesek egymásra és mindegyik hossza 1. Formálisan a skalárszorzatukkal felírva:

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

(Ezt a jelölést gyakran Kronecker-deltának, δ_{ij} -nek is hívják).

Ha az e_i vektorok ortonormált rendszert alkotnak, és emellett **bázist** is alkotnak a V vektortérben, akkor **ortonormált bázisról (ONB)** beszélünk.

Tétel (Kiegészíthetőség):

Ha az euklideszi tér skalárszorzatát egy bázis megadásával jelöltük ki (mint az előző definícióban), akkor ez a kiinduló bázis mindenképpen ortonormált lesz, de rajta kívül rengeteg másik ortonormált bázis is létezik. Sőt, tetszőleges ortonormált rendszer kiegészíthető teljes ortonormált bázissá. Ez a tulajdonság közvetlenül a **Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárásból** adódik.

Definíció: Merőlegesség (Ortogonalitás)

Egy euklideszi térben az a és b vektorok **merőlegesek** (vagy **ortogonálisak**), ha skalárszorzatuk nulla, azaz:

$$a \cdot b = 0$$

Ezt a geometriából ismert módon az $a \perp b$ szimbólummal jelöljük.

Megjegyzés: Ebből a definícióból azonnal következik egy érdekes tulajdonság: a nullvektor ($\underline{0}$) a tér **minden** vektorára merőleges, hiszen bármely v vektorral vett skalárszorzata $\underline{0} \cdot v = 0$. Emellett az is igaz, hogy az egyetlen vektor, amely önmagára merőleges, az a nullvektor.

Feladat (8.1.1): Azonos skalárszorzatot definiáló bázisok

Feladat: Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^4$ -ben a szokásos egységvektorok (e_1, e_2, e_3, e_4) és az alábbi v_1, v_2, v_3, v_4 vektorok ugyanazt a skalárszorzatot definiálják:

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^T \\ v_2 &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)^T \\ v_3 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)^T \\ v_4 &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^T \end{aligned}$$

Megoldás:

Elméleti háttér: Egy adott bázissal úgy definiálunk skalárszorzatot, hogy a bázis vektorait ortonormálnak (páronként merőlegesnek és egységnyi hosszúnak) tekintjük. Ahhoz, hogy a $v_1, \dots, v_4$ rendszer ugyanazt a skalárszorzatot definiálja, mint a szokásos bázis, elegendő belátnunk, hogy a v_i vektorok a szokásos skalárszorzatra nézve egy **ortonormált bázist (ONB)** alkotnak.

Ehhez két dolgot kell ellenőriznünk:

1. Minden vektor hossza (normája) 1.
2. A vektorok páronként merőlegesek egymásra (skalárszorzatuk 0).

1. A normák (hosszúságok) ellenőrzése:

A vektorok hossza önmagukkal vett skalárszorzatuk négyzetgyöke. Mivel minden v_i vektor négy darab $\pm\frac{1}{2}$ komponenst tartalmaz, a négyzetösszegük mindig ugyanaz lesz:

$$\|v_i\|^2 = v_i \cdot v_i = \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Tehát $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = \|v_4\| = 1$. A vektorok normáltak.

2. A merőlegesség (ortogonalitás) ellenőrzése:

Nézzük meg a páronkénti skalárszorzatokat. Két ilyen vektor szorzatakor az azonos előjelű pozíciók $+\frac{1}{4}$ -et, az ellentétes előjelűek $-\frac{1}{4}$ -et adnak.

$$v_1 \cdot v_2 = \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$v_1 \cdot v_3 = \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$v_1 \cdot v_4 = \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$v_2 \cdot v_3 = \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$v_2 \cdot v_4 = \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$v_3 \cdot v_4 = \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

A vektorok páronként merőlegesek egymásra.

Következtetés:

Mivel a négy vektor páronként merőleges és egységnyi hosszú, az $\mathbb{R}^4$ térben egy ortonormált bázist alkotnak. Ebből következik, hogy a rájuk épített koordinátás skalárszorzat megegyezik a szokásos egységvektorok által definiált szokásos skalárszorzattal. Az állítást bebizonyítottuk.

Tétel: Ortogonális vektorok lineáris függetlensége

Állítás: Egy euklideszi térben páronként merőleges, nemnulla vektorok rendszere szükségképpen lineárisan független.

Bizonyítás:

Legyenek $v_1, v_2, \dots, v_k$ a V euklideszi tér nullvektortól különböző, páronként merőleges vektorai. Ez formálisan két feltételt jelent:

1. Nemnulla vektorok: $\|v_i\|^2 = v_i \cdot v_i > 0$ minden i -re.
2. Páronként merőlegesek: $v_i \cdot v_j = 0$ minden $i \neq j$ esetén.

A lineáris függetlenség definíciója szerint azt kell megmutatnunk, hogy a vektorokból felírt nullvektort adó lineáris kombinációban az együtthatók csakis nullák lehetnek. Írjuk fel ezt a lineáris kombinációt:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \underline{0}$$

Most jön a "varázslat": szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát skalárisan egy tetszőlegesen kiválasztott v_j vektorral (ahol $1 \leq j \leq k$)! A skalárszorzat linearitását (disztributivitását) kihasználva tagonként szorozhatunk:

$$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_j v_j + \dots + \lambda_k v_k) \cdot v_j = \underline{0} \cdot v_j$$

$$\lambda_1(v_1 \cdot v_j) + \dots + \lambda_j(v_j \cdot v_j) + \dots + \lambda_k(v_k \cdot v_j) = 0$$

Mivel a vektoraink páronként merőlegesek, minden olyan szorzat, ahol az indexek eltérnek ($i \neq j$), nullává válik ($v_i \cdot v_j = 0$). Az egész hosszú összegből egyetlenegy tag éli túl a szorzást: a j -edik tag!

$$\lambda_j(v_j \cdot v_j) = 0$$

Tudjuk, hogy $v_j \cdot v_j = \|v_j\|^2$.

$$\lambda_j \|v_j\|^2 = 0$$

Mivel feltettük, hogy egyik vektor sem a nullvektor, a hosszuk négyzete szigorúan pozitív ($\|v_j\|^2 > 0$). Egy szorzat pedig csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Ebből egyenesen következik, hogy:

$$\lambda_j = 0$$

Mivel a v_j vektort teljesen tetszőlegesen választottuk ki a rendszerből, ez a gondolatmenet minden egyes indexre elmondható. Tehát $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_k = 0$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a nullvektort csak a triviális (csupa nulla együtthatós) lineáris kombinációval lehet előállítani, azaz a vektorok **lineárisan függetlenek**. ■

Definíció: Vektor hossza (Normája)

Egy euklideszi térben az x vektor **hosszán** (vagy normáján, abszolút értékén) az önmagával vett skalárszorzatának a négyzetgyökét értjük.

A skalárszorzat definíciója szerint ezt úgy kapjuk meg, hogy az x egy ortonormált bázisban vett koordinátáinak négyzetösszegéből négyzetgyököt vonunk. Az x vektor hosszát $\|x\|$ -szel jelöljük.

Összefoglalva:

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

ahol $x_1, \dots, x_n$ az x vektor koordinátái egy ortonormált bázisban.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ez a képlet pontosan a **Pitagorasz-tétel** általánosítása n dimenzióra! Ez is jól mutatja, hogy miért annyira kényelmes ortonormált bázisokkal dolgozni: az absztrakt vektorterekben is megőrzi a klasszikus geometria jól ismert és könnyen számolható tulajdonságait.

Tétel: A vektorhossz (norma) tulajdonságai

Egy V euklideszi térben a vektorok hosszára (normájára) a következő alapvető tulajdonságok teljesülnek:

(N1) **Pozitív definités:** Minden $x \in V$ vektor esetén $\|x\| \geq 0$, és

$$\|x\| = 0 \iff x = \underline{0}$$

(Geometriaai jelentés: Egyetlen szakasznak nincs negatív hossza, és csakis a nullvektornak nulla a hossza.)

(N2) **Abszolút homogenitás:** Minden $x \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra:

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

(Geometriaai jelentés: Ha egy vektort a λ -szorosára nyújtunk, a hossza az eredeti hossz $|\lambda|$ -szorosa lesz. Az abszolút érték azért kell, mert egy vektor -2 -szeresének a hossza is a 2 -szeresére nő, nem a -2 -szeresére!)

(N3) **Háromszög-egyenlőtlenség:** Minden $x, z \in V$ vektor esetén:

$$\|x + z\| \leq \|x\| + \|z\|$$

(Geometriaai jelentés: Bármely háromszögben egy oldal hossza sosem lehet nagyobb, mint a másik két oldal hosszának összege. Két pont között a legrövidebb út az egyenes.)

Definíció: Normált vektortér

Egy $\mathbb{R}$ feletti V vektorteret **normált térnek** (vagy normált vektortérnek) nevezünk, ha értelmezve van rajta egy $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ norma (hosszúságfüggvény), amely minden vektorra rendelkezik a korábban kimondott három alapvető tulajdonsággal.

Definíció

Egy normált térben két vektor távolságán a különbségvektoruk hosszát értjük. Az x és z vektorok távolságát $r(x, z)$ -vel jelöljük. Így:

$$r(x, z) = \|x - z\|$$

Definíció: Vektorok által közbezárt szög

Ha x és z egy euklideszi tér nullától különböző vektorai, akkor a közbezárt szögükön azt a $0 \leq \varphi \leq \pi$ szöget értjük, amelyre:

$$\cos(\varphi) = \frac{x \cdot z}{\|x\| \cdot \|z\|}$$

A fenti definíció csak akkor értelmez valóban szöget, ha a $\cos(\varphi)$ -re megadott kifejezés -1 és $+1$ közé esik.

Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség)

Egy euklideszi tér bármely x és z vektorára fennáll az

$$|x \cdot z| \leq \|x\| \cdot \|z\|$$

egyenlőtlenség. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az x és z lineárisan összefüggők (azaz az egyik a másiknak skalárszorosa).

Példa: Ortonormált bázis elemeinek távolsága

Kérdés: Mennyi egy euklideszi térben egy ortonormált bázis két (különböző) elemének a távolsága?

Megoldás:

Legyen az ortonormált bázis (ONB) két különböző eleme e_i és e_j (ahol $i \neq j$). A definíció szerint róluk a következőket tudjuk:

1. Normáltak (hosszuk 1): $\|e_i\| = 1$ és $\|e_j\| = 1$
2. Merőlegesek (skalárszorzatuk nulla): $e_i \cdot e_j = 0$

A két vektor távolsága a különbségük hossza, azaz $r(e_i, e_j) = \|e_i - e_j\|$. Számoljuk ki a távolság négyzetét úgy, hogy a normát átírjuk önmagával vett skalárszorzattá, majd felbontjuk a zárójeleket (a skalárszorzat disztributív tulajdonságát és szimmetriáját használva):

$$\begin{aligned}\|e_i - e_j\|^2 &= (e_i - e_j) \cdot (e_i - e_j) \\ &= (e_i \cdot e_i) - (e_i \cdot e_j) - (e_j \cdot e_i) + (e_j \cdot e_j) \\ &= \|e_i\|^2 - 2(e_i \cdot e_j) + \|e_j\|^2\end{aligned}$$

Helyettesítsük be a kezdeti ONB tulajdonságokat az egyenletbe:

$$\|e_i - e_j\|^2 = 1^2 - 2(0) + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

Mivel a távolság négyzete 2, magát a távolságot gyökvonással kapjuk meg:

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$$

Következtetés: Egy euklideszi térben bármely ortonormált bázis bármely két különböző eleme közötti távolság pontosan $\sqrt{2}$, függetlenül a tér dimenziószámától.

Feladat: Vektorok közbezárt szöge $\mathbb{R}^4$ -ben

Feladat: Milyen szöget zárnak be az $\mathbb{R}^4$ szokásos euklideszi térben az alábbi vektorok?

$$\text{a) } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } x = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

A vektorok közbezárt szögét a $\cos(\varphi) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}$ képlettel számoljuk ki.

a) eset:

- Skalárszorzat: $x \cdot y = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3$
- Normák: $\|x\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, és $\|y\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{3}$
- Képletbe helyettesítve: $\cos(\varphi) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- A közbezárt szög: $\varphi = \mathbf{30^\circ} = \frac{\pi}{6}$

b) eset:

- Skalárszorzat: $x \cdot y = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = -4$
- Normák: $\|x\| = \sqrt{4} = 2$, és $\|y\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$
- Képletbe helyettesítve: $\cos(\varphi) = \frac{-4}{2 \cdot 2} = -\frac{4}{4} = -1$
- A közbezárt szög: $\varphi = \mathbf{180^\circ} = \pi$ (*A két vektor párhuzamos, de ellentétes irányú*)

c) eset:

- Skalárszorzat: $x \cdot y = 1 \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot 1 + 1 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot 1 = 0 + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 0 = 2\sqrt{2}$
 - Normák: $\|x\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 2 + 1 + 0} = \sqrt{4} = 2$
 $\|y\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{0 + 1 + 2 + 1} = \sqrt{4} = 2$
 - Képletbe helyettesítve: $\cos(\varphi) = \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 - A közbezárt szög: $\varphi = \mathbf{45^\circ} = \frac{\pi}{4}$
-

Feladat: 4-dimenziós kocka (tesszerakt) tulajdonságai

Feladat: Tekintsünk az $\mathbb{R}^4$ szokásos euklideszi térben egy egységnyi oldalú kockát.

- a) Határozzuk meg a csúcsok, az élek és a testátlók számát.
- b) Milyen hosszúak a testátlók?
- c) Milyen szöget zár be egy testátló egy éllel?
- d) Milyen szöget zár be két testátló?
- e) Mennyi a kocka köré, illetve a kockába írt (4-dimenziós) gömb sugara?

Megoldás:

Az egységkockát elhelyezhetjük a koordináta-rendszerben úgy, hogy egyik csúcsa az origóban legyen, az élei pedig a koordinátatengelyekre illeszkedjenek. Ekkor a kocka csúcsainak koordinátái csupa 0 vagy 1 értékből állnak: (x_1, x_2, x_3, x_4) , ahol $x_i \in \{0, 1\}$.

a) Csúcsok, élek és testátlók száma:

- **Csúcsok:** Minden koordináta 2-féleképpen választható (0 vagy 1), így a lehetséges csúcsok száma $2^4 = 16$.
- **Élek:** Minden csúcsból 4 él indul ki (a 4 dimenzió tengelyeivel párhuzamosan). Mivel minden él pontosan 2 csúcsot köt össze, az élek száma: $\frac{16 \cdot 4}{2} = 32$.
- **Testátlók:** A testátló a kocka pontközéppontosan átellenes csúcsait köti össze (vagyis azokat, ahol minden koordináta eltérő, pl. $(0, 0, 0, 0)$ és $(1, 1, 1, 1)$). A 16 csúcs 8 ilyen párt alkot, így összesen 8 testátló van.

b) Testátlók hossza:

A testátló hossza két átellenes csúcs távolsága. Vegyük a $(0, 0, 0, 0)$ és az $(1, 1, 1, 1)$ csúcsokat. A különbségvektoruk $d = (1, 1, 1, 1)$. Ennek hossza a pitagorasz-tétel 4D-s változatával:

$$\|d\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

c) Szög testátló és él között:

A testátló irányvektora legyen $d = (1, 1, 1, 1)$. Egy az origóból induló él irányvektora (például az x_1 -tengely mentén) legyen $e = (1, 0, 0, 0)$. Alkalmazzuk a szögeképletet:

$$\cos(\varphi) = \frac{d \cdot e}{\|d\| \cdot \|e\|} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

Ebből az él és a testátló által bezárt szög: $\varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$.

d) Szög két testátló között:

Két testátló (egyenes) szögének meghatározásához vizsgáljuk meg az irányvektoraikat. Egy alap testátló vektora: $d_1 = (1, 1, 1, 1)$. Egy tőle különböző másik testátló irányvektora olyan, hogy legalább egy koordinátája eltér (vagyis -1 lenne origó-középpontú elhelyezés esetén). Az egyszerűség kedvéért az irányvektorok koordinátáit ± 1 -ként kezelhetjük:

- Ha 1 koordináta előjele tér el (pl. $d_2 = (1, 1, 1, -1)$), a skalárszorzat: $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 2$.
Ekkor $\cos(\varphi) = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, ami **60°**-os szöget jelent.
- Ha 2 koordináta előjele tér el (pl. $d_3 = (1, 1, -1, -1)$), a skalárszorzat: $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0$.
Ekkor $\cos(\varphi) = \frac{0}{2 \cdot 2} = 0$, ami **90°**-os szöget (merőlegességet) jelent.

A többi eset a fentiek egyenesek által bezárt kiegészítő szöge. Bármely két testátló tehát egymással vagy **60°**-os, vagy **90°**-os szöget zár be.

e) Gömbök sugara:

- **Kocka köré írt gömb sugara (R):** Ez megegyezik a kocka középpontjától bármelyik csúcsáig mért távolsággal. Mivel a középpont pont felezi a testátlót, a sugár a testátló hossza osztva kettővel: $R = \frac{2}{2} = 1$.
- **Kockába írt gömb sugara (r):** Ez megegyezik a kocka középpontjától a 3-dimenziós határoló "lapok" (hiperlapok) középpontjáig mért merőleges távolsággal. Ez megegyezik az élhossz felével: $r = \frac{1}{2}$.

Feladat: Ortonormált bázisra vonatkozó azonosságok

Feladat: Legyen $e_1, \dots, e_n$ egy euklideszi tér ortonormált bázisa. Igazoljuk az alábbi azonosságokat!

- $x = \sum_{j=1}^n (e_j \cdot x) e_j$
- $x \cdot z = \sum_{j=1}^n (x \cdot e_j)(e_j \cdot z)$
- Parseval-formula:** $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n |x \cdot e_j|^2$

Megoldás:

a) azonosság bizonyítása:

Mivel $e_1, \dots, e_n$ bázis a térben, bármely x vektor egyértelműen felírható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként valamilyen λ_i együtthatókkal:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát (balról) egy tetszőleges e_j bázisvektorral:

$$e_j \cdot x = e_j \cdot \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_j \cdot e_i)$$

Mivel a bázis ortonormált, az $e_j \cdot e_i$ szorzat értéke 0, ha $i \neq j$, és 1, ha $i = j$. A szummából tehát kizárólag a j -edik tag marad meg:

$$e_j \cdot x = \lambda_j \cdot 1 = \lambda_j$$

Ezeket az együtthatókat (a Fourier-együtthatókat) visszahelyettesítve a lineáris kombinációba, megkapjuk a bizonyítandó állítást:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e}_j$$

b) azonosság bizonyítása:

Írjuk fel az x és z vektorokat bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Az indexelést válasszuk külön az átláthatóság kedvéért:

$$x = \sum_{i=1}^n (x \cdot e_i) e_i \quad \text{és} \quad z = \sum_{j=1}^n (e_j \cdot z) e_j$$

Képezzük a két vektor skalárszorzatát, kihasználva a linearitást:

$$x \cdot z = \left(\sum_{i=1}^n (x \cdot e_i) e_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n (e_j \cdot z) e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x \cdot e_i) (e_j \cdot z) (e_i \cdot e_j)$$

Az ortonormalitás miatt az $e_i \cdot e_j$ szorzat csak $i = j$ esetén 1, minden más esetben 0. A dupla összegből így csak azok a tagok maradnak meg, ahol az indexek megegyeznek:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{z})$$

c) azonosság (Parseval-formula) bizonyítása:

A Parseval-formula a b) állítás speciális esete, amikor a vektort önmagával szorozzuk ($z = x$). Helyettesítsünk z helyére x -et a b) pont eredményébe:

$$x \cdot x = \sum_{j=1}^n (x \cdot e_j) (e_j \cdot x)$$

Mivel valós euklideszi térben a skalárszorzat kommutatív, $(e_j \cdot x) = (x \cdot e_j)$, így a tagok szorzata $(x \cdot e_j)^2$, ami minden valós szám esetén megegyezik az abszolút érték négyzetével, $|x \cdot e_j|^2$ -tel. (Ez a jelölés megőrzi az érvényességét a komplex unitér terekben is).

Mivel a definíció szerint $\|x\|^2 = x \cdot x$, azonnal adódik a formula:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^n |\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j|^2$$