

Kvadratikus alak

Lineáris algebra

Kvadratikus alakok diagonalizálása: Részletes levezetések

a) $q(x) = x_1x_2$

Megoldás:

A probléma: Nincs tisztán négyzetes tag, csak egy vegyes szorzat, így nem tudjuk elkezdni a hagyományos teljes négyzetté alakítást.

A trükk: Ilyenkor alkalmazzuk a standard segéd-helyettesítést, amely az $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ azonosságra épül. Vezessünk be új változókat:

$$x_1 = y_1 + y_2 \quad \text{és} \quad x_2 = y_1 - y_2$$

Helyettesítsük be ezeket az eredeti kifejezésbe:

$$q(y) = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$$

A szorzást elvégezve a vegyes tagok kiesnek, és azonnal megkapjuk a diagonális alakot (amely egy indefinit nyeregfelületet ír le):

$$q(y) = y_1^2 - y_2^2$$

b) $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3$

Megoldás:

A probléma: Szintén nincs egyetlen tiszta négyzetes tagunk sem.

A trükk: Vegyük észre, hogy az x_2 mindkét tagban szerepel. Emeljük ki!

$$q(x) = x_2(x_1 + x_3)$$

Most ez pontosan úgy néz ki, mint az előző feladatban egy szorzat, amelyre alkalmazhatjuk az $A \cdot B = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2$ algebrai azonosságot. Legyen $A = x_1 + x_3$ és $B = x_2$. Behelyettesítve:

$$q(x) = \left(\frac{x_1 + x_3 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 + x_3 - x_2}{2}\right)^2$$

Bevezetjük az új változókat a zárójelek tartalmára:

$$y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, \quad y_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

A diagonális alak tehát:

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_1^2 - \mathbf{y}_2^2$$

c) $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

Megoldás:

A probléma: Nincsenek négyzetes tagok, és most kiemelni sem tudunk olyan egyszerűen, mint a b) pontban.

A trükk: Mesterségesen kell gyártanunk egy négyzetes tagot a segéd-helyettesítéssel. Bontsuk szét az első tagot:

$$x_1 = z_1 + z_2, \quad x_2 = z_1 - z_2, \quad x_3 = z_3$$

Helyettesítsük be ezeket az eredeti képletbe, az aláírások mutatják, melyik tag miből származik:

$$q(z) = \underbrace{(z_1 + z_2)(z_1 - z_2)}_{x_1x_2} + \underbrace{(z_1 - z_2)z_3}_{x_2x_3} + \underbrace{z_3(z_1 + z_2)}_{x_3x_1}$$

Felbontva a zárójeleket és összevonva a tagokat (a z_2z_3 kiesik):

$$q(z) = (z_1^2 - z_2^2) + (z_1z_3 - z_2z_3) + (z_1z_3 + z_2z_3) = z_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_3$$

A kiegészítés: Lett egy z_1^2 tagunk! Emeljük ki a z_1 -et tartalmazó tagokat ($z_1^2 + 2z_1z_3$), és alakítsuk teljes négyzetté:

$$z_1^2 + 2z_1z_3 = (z_1 + z_3)^2 - z_3^2$$

Ezt visszaírjuk a kifejezésbe a megmaradt $-z_2^2$ mellé:

$$q = (z_1 + z_3)^2 - z_3^2 - z_2^2$$

Az új változók elnevezésével ($y_1 = z_1 + z_3$, $y_2 = z_2$, $y_3 = z_3$) a végeredmény:

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_1^2 - \mathbf{y}_2^2 - \mathbf{y}_3^2$$

d) $q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

Megoldás:

A módszer: Itt van négyzetes tag (x_1^2), így egyből kezdhetjük a kiegészítést. Gyűjtsünk össze mindent, amiben x_1 van: $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$. Ezt a $(x_1 - x_2 + x_3)^2$ kifejtéséből kaphatjuk meg. Kompenzáljunk a "felesleges" tagokkal:

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3$$

Helyettesítsük vissza a maradékkal ($-3x_2^2 - 6x_2x_3$) együtt:

$$q(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 \underbrace{-x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3}_{\text{kompenzáció}} \underbrace{-3x_2^2 - 6x_2x_3}_{\text{eredeti maradék}}$$

Vonjuk össze a maradékot:

$$-4x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2 = -(4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2) = -(2x_2 + x_3)^2$$

Ezzel meg is vagyunk. Az $y_1 = x_1 - x_2 + x_3$ és $y_2 = 2x_2 + x_3$ választással:

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_1^2 - \mathbf{y}_2^2$$

e) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Megoldás:

A módszer: Szisztematikusan végigmegyünk a változókon. Kezdjük az x_1 -es tagokkal ($x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$):

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3$$

Visszahelyettesítve és a maradékot összevonva:

$$q(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 \underbrace{-4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3}_{\text{kompenzáció}} \underbrace{+x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3}_{\text{eredeti maradék}}$$

$$q(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$$

Most ismétlődik az algoritmus a maradékra. Emeljük ki a -3 -at az x_2 -t tartalmazó tagokból:

$$-3 \left(x_2^2 + \frac{2}{3}x_2x_3 \right) = -3 \left(\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 \right)^2 - \frac{1}{9}x_3^2 \right) = -3 \left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 \right)^2 + \frac{1}{3}x_3^2$$

Ezt a kifejtést tegyük vissza az eredeti egyenletbe, ahol még ott vár a $+2x_3^2$:

$$q(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3 \left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 \right)^2 + \frac{1}{3}x_3^2 + 2x_3^2$$

Mivel $\frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$, az új változókat bevezetve ($y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 + \frac{1}{3}x_3$, $y_3 = x_3$) a végeredmény:

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_1^2 - 3\mathbf{y}_2^2 + \frac{7}{3}\mathbf{y}_3^2$$

Feladat: Ortogonális bázis keresése teljes négyzetté kiegészítéssel (Lagrange-módszer)

Legyen $V = \mathbb{R}^3$, az u , illetve v vektor komponenseit jelölje u_1, u_2, u_3 , illetve v_1, v_2, v_3 . Keressünk **A**-ortogonális bázist és diagonális mátrixot a következő szimmetrikus bilineáris függvényhez:

$$\mathbf{A}(u, v) = 4u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 2u_1v_3 + 2u_3v_1 + 2u_2v_3 + 2u_3v_2$$

Megoldás:

A feladatot a Gram–Schmidt eljárás helyett most a Lagrange-féle teljes négyzetté kiegészítéssel oldjuk meg. A két módszer elméletileg egyenértékű: a kvadratikus alak diagonalizálását elvégző koordináta-transzformáció inverze közvetlenül megadja az ortogonális bázisvektorokat.

1. lépés: A kvadratikus alak felírása és teljes négyzetté kiegészítése

A bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak ($q(u) = \mathbf{A}(u, u)$):

$$q(u) = 4u_1^2 + 4u_1u_2 + 4u_1u_3 + 4u_2u_3$$

Fogjuk össze az u_1 változót tartalmazó tagokat, és emeljünk ki 4-et:

$$q(u) = 4(u_1^2 + u_1u_2 + u_1u_3) + 4u_2u_3$$

A zárójelen belüli kifejezést teljes négyzetté egészítjük ki. Tudjuk, hogy:

$$\left(u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3\right)^2 = u_1^2 + \frac{1}{4}u_2^2 + \frac{1}{4}u_3^2 + u_1u_2 + u_1u_3 + \frac{1}{2}u_2u_3$$

Ezt felhasználva helyettesítsünk vissza, kompenzálva a hozzáadott tagokat:

$$q(u) = 4 \left[\left(u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3\right)^2 - \frac{1}{4}u_2^2 - \frac{1}{4}u_3^2 - \frac{1}{2}u_2u_3 \right] + 4u_2u_3$$

Beszorozva 4-gyel:

$$q(u) = 4 \left(u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3\right)^2 - u_2^2 - u_3^2 - 2u_2u_3 + 4u_2u_3$$

A 4-es szorzót bevisszük a négyzet alá (2-ként), és összevonjuk a maradékot:

$$q(u) = (2u_1 + u_2 + u_3)^2 - u_2^2 + 2u_2u_3 - u_3^2$$

A maradék részt ($-u_2^2 + 2u_2u_3 - u_3^2$) teljes négyzetté alakítjuk (kiemelve egy mínuszt):

$$q(u) = (2u_1 + u_2 + u_3)^2 - (u_2^2 - 2u_2u_3 + u_3^2)$$

$$q(u) = (2u_1 + u_2 + u_3)^2 - (u_2 - u_3)^2$$

2. lépés: Az új változók és a diagonális mátrix

Vezessük be az új koordinátákat:

$$y_1 = 2u_1 + u_2 + u_3$$

$$y_2 = u_2 - u_3$$

$$y_3 = u_3 \quad (\text{Mivel a harmadik négyzetes tag hiányzik, } 0 \cdot y_3^2 \text{ fog szerepelni})$$

A kvadratikus alak diagonális alakja:

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_1^2 - \mathbf{y}_2^2 + 0\mathbf{y}_3^2$$

A keresett diagonális mátrix a főátlóban lévő együtthatókból áll:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. lépés: Az A-ortogonális bázis meghatározása

A bázisvektorokat a koordináta-transzformáció inverzéből kapjuk meg. Fejezzük ki az eredeti u_i változókat az y_i változókkal! Lépésről lépésre visszafelé haladva:

1. $u_3 = y_3$
2. $u_2 = y_2 + u_3 = y_2 + y_3$
3. $2u_1 = y_1 - u_2 - u_3 = y_1 - (y_2 + y_3) - y_3 = y_1 - y_2 - 2y_3 \implies u_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - y_3$

Vektoros alakban felírva az $u = y_1c_1 + y_2c_2 + y_3c_3$ kombinációt:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A szorzótényezők oszlopvektorai adják a keresett $\mathbf{A}$ -ortogonális bázist:

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
