Algebra és számelmélet gyakorlat
2023/2024 I. félév

2023. Október 12.

1. Komplex számok II.

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

   a.) $z^2 - 4z + 29 = 0$

   b.) $z^2 - 2iz - 5 = 0$

   c.) $z^2 - (2+3i)z - 1 + 3i = 0$

   d.) $z^2 + (i-2)z + 6 - 6i = 0$

1.1. Emlékeztető - Műveletek trigonometrikus alakban

Szorzás/osztás: Legyenek:

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1| \cdot (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \\ z_2 &= |z_2| \cdot (\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \end{aligned}$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1||z_2| \cdot (\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2)) \end{aligned}$$

Geometriai jelentés: forgatva-nyújtás!

Hatványozás (Moivre-képlete): Legyen $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$
Ekkor:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\cdot\alpha) + i\sin(n\cdot\alpha))$$

2. Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket:

   a.) $(1+i)^{52}$

   b.) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

   c.) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$

Gyökvonás képlet: n db. gyök!

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right),\ \text{ ahol } k=0,1,2,\ldots,n-1$$

3. Végezzük el az alábbi gyökvonásokat!

$$\sqrt[3]{i};\quad \sqrt[3]{2-2i};\quad \sqrt[6]{1};\quad \sqrt[6]{-27};$$

1.1. Definíció. *Az $\varepsilon\in\mathbb{C}$ számot n-edik komplex egységgyöknek nevezzük, ha $\varepsilon^n=1$. Egy komplex szám egységgyök, ha n-edik egységgyök alkalmas pozitív n egészre.*

Például az i szám negyedik egységgyök, hiszen $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i^1=i,\ldots$. Vagyis a hatványok periodikusan ismétlődnek. Ha lerajzoljuk őket, egy négyzetet kapunk, melynek a középpontja az origó, az egységkörbe írható, és az egyik csúcsa az 1.

Az n-edik egységgyököket trigonometrikus alakban keressük. Mivel $\varepsilon^n=1$ és az abszolút érték szorzattartó, $|\varepsilon|^n=1$, azaz $|\varepsilon|=1$. Ha ε szöge α, akkor

$$\cos n\alpha+i\sin n\alpha=\varepsilon^n=1=1(\cos 0+i\sin 0).$$

1.1. Tétel. *Az n-edik egységgyökök száma pontosan n, ezek az*

$$\varepsilon_k=\cos(2k\pi/n)+i\sin(2k\pi/n)=\varepsilon_1^k$$

képlettel definiált $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n=1$

1.2. Definíció. *Az n-ed rendű komplex számokat primitív n-edik komplex egységgyöknek nevezzük. Ezek mind az n-edik egységgyök között vannak. Azok az ε_k számok lesznek primitív n-edik egységgyökök, melyekre $(k, n) = 1$.*

1.2. Tétel. *Az primitív n-edik egységgyökök pontosan az*

$$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$$

alakú számok, ahol k és n relatív prímek és $0 \leq k < n$. Számuk $\varphi(n)$. Egy komplex szám akkor és csak akkor n-edik primitív egységgyök, ha a hatványai pontosan az összes n-edik egységgyök.

5. Írjuk fel a *a.*) 2., *b.*) 3., *c.*) 4., *d.*) 6., *e.*) 8., *f.*) 12., *g.*) 24. egységgyököket.

6. Írjuk fel a *a.*) 2., *b.*) 3., *c.*) 4., *d.*) 6., *e.*) 8., *f.*) 12., *g.*) 24. primitív egységgyököket.

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.web.elte.hu