Algebra és számelmélet gyakorlat
2023/2024 I. félév

2023. Október 13.

1. Determinánsok

1.1. Definíció (A 2×2-es mátrix determinánsa). *Ha* $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *akkor* $\det(M) = ad - bc$ *az* M *determinánsa.*

1.1. Lemma. $\det(MN) = \det(M)\det(N)$

1.1. Tétel. *Ha* $\det(M) = 0$, *akkor* M*-nek nincs inverze.*

1.2. Tétel. *Ha a mátrix két oszlopa egyenlő, akkor a determináns nulla.*

1.2. Definíció. *Az* M *felső háromszögmátrix, ha a főátló alatt csupa nulla áll.*

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad - 0b = ad,$$

azaz felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

1.3. Tétel (Oszlopcsere). *A két oszlop cseréjénél a determináns előjelet vált.*

1.4. Tétel (A transzponált mátrix determinánsa). *A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.*

1. Számítsuk ki az következő determinánsokat:

a.) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; b.) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; c.) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;

d.) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$; e.) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ \gamma-\delta i & \alpha-\beta i \end{vmatrix}$; f.) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

g.) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; h.) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$; i.) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

2. Számítsuk ki az következő determinánsokat:

a.) $\begin{vmatrix} 1 & \lg_b a \\ \lg_a b & 1 \end{vmatrix}$; b.) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$; c.) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

d.) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$;

e.) $\begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix}$, ahol $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$;

f.) $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, ahol $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$;

3. Számítsuk ki az következő determinánsokat:

a.) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; b.) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; c.) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$;

d.) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; e.) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

1.1. Kifejtés

1.3. Definíció. *Tekintsünk egy n-edrendű determinánst. Hagyjuk el az i-edik sort és a j-edik oszlopot, így egy $(n-1)\times(n-1)$-es determináns keletkezik. Az a_{ij} elemhez tartozó A_{ij} előjeles aldeterminánson ennek a determinánsnak a $(-1)^{i+j}$-szeresét értjük.*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ esetén } A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6.$$

Az előjeles aldeterminánsok jelentőségét az ún. kifejtési tétel adja.

1.5. Tétel (Kifejtési tétel). *Ha egy sor minden elemét megszorozzuk a hozzátartozó előjeles aldeterminánssal, az így kapott szorzatoknak az összege a determinánssal egyenlők:*

$$\det A = \alpha_{i1}A_{i1} + \alpha_{i2}A_{i2} + \cdots + \alpha_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}A_{ij}$$

Ezt hívjuk a determináns i-edik sor szerinti kifejtésének. Természetesen hasonló állítás érvényes sorok helyett soszlopokra is.

A $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ determinánst a második oszlopa szerint kifejtve:

$$D = 2\cdot(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 8\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

adódik.

1.4. Definíció (Vandermonde-determináns). *Legyen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ elemek által generált Vandermonde-determináns*

$$V(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_1^2 & \cdots & \gamma_1^{n-1} \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_2^2 & \cdots & \gamma_2^{n-1} \\ 1 & \gamma_3 & \gamma_3^2 & \cdots & \gamma_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \gamma_n & \gamma_n^2 & \cdots & \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

A Vandermonde-determináns i-edik sorában tehát rendre γ_i-nek a $0, 1, \ldots n-$ 1-edik hatványa áll. Ha két generáló elem azonos, akkor kétegyforma sor van, és így a determináns 0. Az alábbi szorzatalakból kiderül, hogy ennek a megfordítása is igaz.

1.6. Tétel.

$$V(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_1^2 & \ldots & \gamma_1^{n-1} \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_2^2 & \ldots & \gamma_2^{n-1} \\ 1 & \gamma_3 & \gamma_3^2 & \ldots & \gamma_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \gamma_n & \gamma_n^2 & \ldots & \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < i \leq n} (\gamma_j - \gamma_i).$$

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.web.elte.hu