Algebra és számelmélet gyakorlat
2023/2024 I. félév

2023. Szeptember 21.

1. Lineáris egyenletrendszerek

1.1. Gauss-elimináció

1.1. Definíció (Lineáris egyenlet). *Legyenek $x_1, x_2, \dots x_m$ az ismeretlenek. Ekkor*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_mx_m = b$$

ahol ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, a_2, \dots a_m, b$ számok.

1.2. Definíció (Lineáris egyenletrendszer). *Több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. n egyenletből álló, m ismeretlenes egyenletrendszer általános jelölése:*

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\
\cdots &\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n
\end{aligned}$$

Itt n egyenlet van és m ismeretlen.

1.1. Tétel (F3.1.2. Tétel). *Ha egy k egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, akkor $n \leq k$.*

1.2. Homogén lineáris egyenletrendszerek

1.3. Definíció. *Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő. Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.*

1.2. Tétel (F3.1.4 Tétel). *Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor van nemtriviális megoldás.*

1.1. Bizonyítás. *Az előző tétel miatt nem lehet egyértelmű a megoldás, de nem is ellentmondásos, mert van (triviális) megoldás. Ezért van legalább még egy megoldás.*

Algoritmus lépései:

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az (1)+(2)-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen már nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása. Ez egy tilos sor.

(6) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, és a jobb oldali b_j is nulla, akkor ezt a sort kihúzzuk.

Megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük. A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, és abban az együtthatója 1. Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

Megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így, ha van szabad változó, akkor a megoldások száma végtelen.
A megoldás akkor egyértelmű, ha az egyenletrendszer nem ellentmondásos, és nincs szabad változó.

Példák

1. Oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 6 \\ 7x_1 + 8x_2 &= 9 \end{aligned}$$

Ennek kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Az utolsó sor elhagyható

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Azaz a megoldás: $x_1 = -1, x_2 = 2$

2. Oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 6 \\ 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa a következőképpen változik a kiküszöbölés során:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Az utolsó sor miatt nincs megoldás!

3. Oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 8 \\ 9x_1 + 10x_2 + 11x_3 &= 12 \\ 13x_1 + 14x_2 + 15x_3 &= 16 \end{aligned}$$

A következőképp alakul a kiküszöbölés:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A két utolsó sort elhagyhatjuk:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Itt x_3-ra semmilyen megkötés sem adódott, annak értéke tetszőlegesen megválasztható. Ha x_3 értékét már rögzítettük, akkor ennek segítségével a másik két ismeretlen már egyértelműen kifejezhető:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + x_3 \\ x_2 &= 3 - 2x_3 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer összes megoldása tehát:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + \nu \\ x_2 &= 3 - 2\nu \end{aligned}$$

ahol ν tetszőleges valós szám.

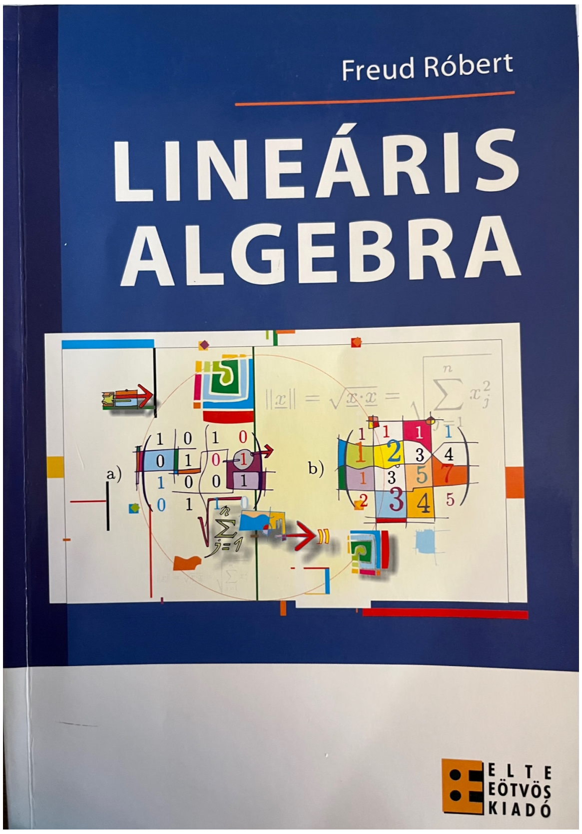
1.3. Tétel (F3.1.1). ˜

I. *Egy lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa elemi sorekvivalens átalakításokkal redukált lépcsős alakra hozható.*

II. *Az egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha a (redukált) lépcsős alakban nincs tilos sor.*

III. *Az egyenletrendszernek akkor és csak akkor egyértelmű a megoldása, ha (nincs tilos sor) a vezéregyesek száma megegyezik az ismeretlenek számával.*

IV. *Ha több megoldás van, akkor a vezéregyest nem tartalmazó oszlopoknak megfelelő ismeretlenek szabad paraméterek, a többi ismeretlen pedig ezekkel egyértelműen kifejezhető. A megoldásszám végtelen test esetén végtelen, t-elemű test esetén pedig t^s, ahol s a szabad paraméterek száma.*



1. ábra. Freud Róbert: Lineáris Algebra

1. Oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő egyenletrendszereket!

   (a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} -8x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 &= 16 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 7 \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} 33x_1 + 25x_2 + 23x_3 &= 78 \\ 20x_1 + 17x_2 + 14x_3 &= 51 \\ 25x_1 + 20x_2 + 17x_3 &= 62 \end{aligned}$$

   (d)

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= -4 \\ -x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 &= 12 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 &= 8 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 10x_4 &= 34 \end{aligned}$$

2. Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek általános megoldását.

   (a)

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x - y + z + t &= 2 \\ -3x + 3t &= 0 \\ -2x - y + z + 4t &= 2 \\ 4x - y + z - 2t &= 2 \end{aligned}$$

3. Gauss eliminációval oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket!

(a)

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 - 3x_3 &= -9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 13 \\ 5x_1 + 2x_3 &= -13 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -8 \\ -x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -9 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 &= -30 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 29 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

4. Határozzuk meg a következő mátrixok inverzét Gauss-eliminációval!:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

(e)

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.web.elte.hu