Algebra és számelmélet gyakorlat
2023/2024 I. félév

2023. November 17.

1. Emlékeztető

1.1. Előadás (2023. november 10.)

Absztrakt algebra: Művelet, asszociativitás, kommutativitás. Nullelem, egységelem, ellentett, inverz. Csoport, gyűrű, nullosztómentesség. Additív és multiplikatív csoport. Egységelemes, kommutatív, szokásos gyűrű, test. Az egyszerűsítési szabály, szorzat inverze. Polinomgyűrűk.
Irodalom: Kiss Emil 18. és 19. dia.

1.1. Definíció. *Ha egy nem üres halmazon értelmezett egy asszociatív művelet, akkor félcsoportról beszélünk.*

1.2. Definíció (Csoport). *Egy G nem üres halmaz csoport, ha értelmezett rajta egy $*$ művelet a következő tulajdonságokkal:*

(1) A $*$ művelet asszociatív;

(2) A $*$-ra nézve az 1 egységelem. (neutrális elem)

(3) G minden elemének van inverze.

Kommutatív(Abel-csoport) csoport: ha $*$ kommutatív.

Példák:

- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{C}[x], \mathbb{R}^{n\times m}$ kommutatív csoport az összeadása.
- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$-ből a 0-t kihagyva kommutatív csoport a szorzásra.

- Az S_n permutációi nemkommutatív csoport a kompozícióra $n > 2$ esetén.
- $\mathbb{Z}_5$ elemei kommutatív csoport a mod 5 összeadásra

1.3. Definíció (Gyűrű). *Az R gyűrű, ha értelmezett az összeadás és a szorzás művelete úgy, hogy*

(1) Az összeadás asszociatív.

(2) Az összeadás kommutatív.

(3) Van az összeadásra nézve egy 0 nullelem.

(4) Minden elemnek van ellentettje.

(5) A szorzás asszociatív.

(6) Tetszőleges $x, y, z \in R$ esetén igaz a disztributivitás: $(x+y)z = xz+yz$ és $z(x+y) = zx+zy$.

Kommutatív gyűrű: a szorzás kommutatív.
Egységelemes gyűrű: a szorzásra nézve van egységelem (jele 1).
Test: egységelemes, kommutatív gyűrű, amelyben minden nem nulla elemnek van (a szorzásra) inverze.

1.4. Definíció. *Ha egy gyűrű nem nulla elemei csoportot alkotnak a szorzásra, akkor a gyűrűt ferdetestnek hívjuk. A testek a kommutatív ferdetestek.*

1.1. Tétel. *Minden ferdetest nullosztómentes*

1.1. Állítás. *A $\mathbb{Z}_m$ gyűrű akkor és csak akkor nullosztómentes, ha m prímszám és ebben az esetben test is.*

Példák:

- A polinomok, azaz $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ gyűrű.
- A négyzetes mátrixok, azaz $\mathbb{Q}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{C}^{n\times n}$ gyűrű.
- Folytonos (differenciálható) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények: gyűrű
- Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Z}$): gyűrű
- Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$): test
- Az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Z}$): gyűrű
- Az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$): test

2. Feladatok

1. Írjuk föl a modulo 5 és a modulo 6 összeadás és szorzás táblázatát. Végezzük el a $2:3$ osztást modulo 5. Tudunk-e osztani $\mathbb{Z}_5$ minden nem nulla elemével? Igaz-e, hogy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla? Mi a helyzet modulo 6?

2. Hány nullosztó van $\mathbb{Z}_4$-ben?

3. Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e? Amelyek gyűrűk, azokban mik az invertálható elemek?

   (1) $\{a+bi : a,b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.

   (2) $\mathbb{G} = \{a+bi : a,b \in \mathbb{Z}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve. (Gauss egészek)

   (3) $\{a+b\sqrt{2} : a,b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.

   (4) $\{a+b\sqrt[3]{2} : a,b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.

4. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Z}_6$ gyűrűben $R = \{0,2,4\}$ részgyűrűt alkot. Egységelemes gyűrű-e, illetve test-e az R gyűrű?

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.web.elte.hu