Algebra és számelmélet gyakorlat
2023/2024 I. félév

2023. November 16.

1. Emlékeztető

1.1. Előadás (2023. november 8.)

Lineáris algebra: Lineáris kombináció, oszlopvektorok függetlensége, jellemzése lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával. A függetlenség és a függés kapcsolata. Vektorrendszer és mátrix rangja, sorrang=oszloprang=determinánsrang. A rang meghatározása Gauss-eliminációval. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának, és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével. A determináns eltűnésének jellemzése.

1.1. Definíció (Lineáris kombináció). *Legyen* $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_m \in T^k$ *és* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$*, azaz vegyünk* m *darab* T^k*-beli vektort és ugyanennyi* T*-beli skalárt. Ekkor a* $\lambda_1\underline{u}_1 + \cdots + \lambda_m\underline{u}_m \in T^k$ *vektort az* $\underline{u}_i$ *vektorok (*λ_i *skalárral képzett) lineáris kombinációjának nevezzük.*

Triviális lineáris kombináció: minden együttható nulla. Vagyis $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

1.2. Definíció. *Az* $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_m \in T^k$ *vektorok lineárisan összefüggők, ha léteznek olyan* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ *skalárok, amelyek nem mind* 0*-k és*

$$\lambda_1\underline{u}_1 + \cdots + \lambda_m\underline{u}_m = \underline{0}$$

.

1.3. Definíció. *Az* $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_m \in T^k$ *vektorok lineárisan függetlenek, ha* $\lambda_1 \underline{u}_1 + \cdots + \lambda_m \underline{u}_m = \underline{0}$ *CSAK úgy valósulhat meg, ha mindegyik* $\lambda_i = 0$. *Azaz*

$$\lambda_1 \underline{u}_1 + \cdots + \lambda_m \underline{u}_m = \underline{0} \quad \Rightarrow \lambda_i = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Függetlenség és egyenletrendszer A $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in T^n$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $x_1 \underline{v}_1 + \cdots + x_m \underline{v}_m = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Ezért a függetlenség Gauss-eliminációval eldönthető: a rendszer akkor független, ha az elimináció során nem keletkezik szabad változó, azaz minden oszlopban van vezéregyes.

1.1. Tétel. *Akárhogyan választunk* T^k*-ban* k*-nál több vektort, ezek szükségképpen lineárisan összefüggők.*

1.4. Definíció. $\underline{v} \in V$ *lineárisan függ* $\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_m$*-től, ha felírható* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots \underline{v}_m$ *lineáris kombinációjként.*

A mátrix oszloprangját az oszlopai közül kiválasztható lineárisan független vektorok maximális számaként értelmezzük:

1.5. Definíció (Oszloprang). *Egy* A *mátrix oszloprangja* r*, ha* A *oszlopvektorai között található* r *lineárisan független, de* r*-nél több nem.*

1.6. Definíció (Sorrang). *Egy* A *mátrix sorrangja* r*, ha* A *sorvektorai között található* r *lineárisan független, de* r*-nél több nem.*

1.7. Definíció (Determinánsrang). *Egy* A *mátrix determinánsrangja* r*, ha van olyan* $r \times r$*-es aldeterminánsa, ami nem nulla, de bármely* r*-nél nagyobb rendű aldeterminánsa már nulla.*

1.2. Tétel. *Bármely mátrix oszloprangja, sorrangja és determinánsrangja megegyezik.*

Ezt a közös értéket nevezzük a mátrix rangjának. Az A mátrix rangját $r(A)$-val jelöljük.

1.3. Tétel. *Az* $A\underline{x} = \underline{b}$ *egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha* $r(A) = r(A|\underline{b})$*, azaz az együtthatómátrix rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával. Megoldahtóság esetén a megoldás akkor és csak akkor egyértelmű, ha a (közös) rang megegyezik az ismeretlenek számával.*

2. Feladatok

1. Döntsük el az alábbi $\mathbf{R}^3$-beli vektorokról, hogy lineárisan összefüggők vagy függetlenek. Ha összefüggők, fejezzük ki az egyiket a többi lineáris kombinációjaként.

   (i) $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \ \underline{u}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \ \underline{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

   (ii) $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

2. Döntsük el az alábbi $\mathbf{R}^4$-beli vektorokról, hogy lineárisan összefüggők vagy függetlenek. Ha összefüggők, fejezzük ki az egyiket a többi lineáris kombinációjaként.

   $$(i) \ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\5\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\1\\2\end{pmatrix} \qquad (ii) \ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\5\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\1\\2\end{pmatrix}$$

3. Lineárisan függetlenek-e (külön-külön) az alábbi mátrixok oszlop-, illetve sorvektorai? Mindegyik mátrixban adjunk meg annyi lineárisan független oszlopot, ahányat csak lehet, az összes lehetséges módon. Határozzuk meg a mátrixok sor-, illetve oszloprangját.

   $$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&6\\2&0&5\\3&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\3&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.web.elte.hu