Algebra és számelmélet gyakorlat
2023/2024 I. félév

2023. Október 27.

1. Emlékeztető

1.1. Definíció (Előjeles aldetermináns). *Tekintsünk egy n-edrendű determinánst. Hagyjuk el az i-edik sort és a j-edik oszlopot, így egy $(n-1) \times (n-1)$-es determináns keletkezik. Az a_{ij} elemhez tartozó A_{ij} előjeles aldeterminánson ennek a determinánsnak a $(-1)^{i+j}$-szeresét értjük.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{esetn} \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6.$$

1.1. Tétel (Kifejtési tétel). *Ha egy sor minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, az így kapott szorzatoknak az összege a determinánssal egyenlő.*

$$\det A = \alpha_{i1}A_{i1} + \alpha_{i2}A_{i2} + \cdots + \alpha_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}A_{ij}.$$

Ezt hívjuk a determináns i-edik sor szerinti kifejtésének. Természetesen hasonló állítás érvényes sorok helyett oszlopokra is.

Példa:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

1.2. Tétel (Ferde kifejtési tétel). *Ha egy sor elemeit rendre egy másik sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal szorozzuk meg, az így kapott szorzatoknak az összege mindig* 0.

$$\det A = \alpha_{r1}A_{k1} + \alpha_{r2}A_{k2} + \cdots + \alpha_{rn}A_{kn} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{rj}A_{kj} = 0.$$

Itt a kifejtés szó megtévesztő, mert az összeg értékének semmi köze sincs az eredeti determinánshoz; ez az összeg mindig 0, függetlenül attól, hogy maga a determináns 0 vagy sem.

Példa: Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -12 + 30 - 18 = 0.$$

1.2. Definíció (Adjungált). *Legyen $A \in \mathbb{C}^{k\times n}$. Ekkor A adjungáltján azt a $B \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mátrixot értjük, amelyre $\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$ (ahol $\overline{z}$ a z komplex szám konjugáltját jelenti). Az A mátrix adjungáltját A^*-gal jelöljük.*

Egy mátrix adjungáltja tehát a transzponáltjának a konjugáltja. Valós elemű A esetén nyilván $A^* = A^T$

1.3. Tétel. *Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inveze, ha* $\det(M) \neq 0$ *és ekkor az invez képlete*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$$

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk és elosztjuk M determinánsával.

Példa:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

1.4. Tétel (Cramer szabály). *Jelölje M_j azt a mátrixot, amelyet az M-ből úgy kapunk, hogy a j-edik oszlop helyére a b oszlopvektort tesszük. Ha* $\det(M) \neq 0$, *akkor a megoldás*

$$x_j = \frac{\det(M_j)}{\det(M)}$$

Példa:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 5x - 2y &= 8 \end{aligned}$$

Megoldás:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24}{-4+15} = \frac{22}{11} = 2$$

illetve

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16-5}{-4+15} = \frac{11}{11} = 1$$

1.5. Tétel (Vandermonde-determináns).

$$V(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_1^2 & \ldots & \gamma_1^{n-1} \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_2^2 & \ldots & \gamma_2^{n-1} \\ 1 & \gamma_3 & \gamma_3^2 & \ldots & \gamma_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \gamma_n & \gamma_n^2 & \ldots & \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (\gamma_i - \gamma_j).$$

1.1. Bizonyítás. *Vonjuk ki jobbról balra haladva minden oszlopból az őt megelőző oszlop γ_1-szeresét:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \gamma_2 - \gamma_1 & \gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_2 & \ldots & \gamma_2^{n-1} - \gamma_1\gamma_2^{n-2} \\ 1 & \gamma_3 - \gamma_1 & \gamma_3^2 - \gamma_1\gamma_3 & \ldots & \gamma_3^{n-1} - \gamma_1\gamma_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \gamma_n - \gamma_1 & \gamma_n^2 - \gamma_1\gamma_n & \ldots & \gamma_n^{n-1} - \gamma_1\gamma_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Most vonjuk le minden sorból az első sort, ezzel az első oszlop utolsó $n-1$eleme is 0 *lesz, a többi elem pedig nem változott. A második, harmadik stb.*

sorból rendre $\gamma_2 - \gamma_1$-et, $\gamma_3 - \gamma_1$-et stb. kiemelhetünk. Ezzel a:

$$(\gamma_2 - \gamma_1) \cdots (\gamma_n - \gamma_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_2^{n-2} \\ 0 & 1 & \gamma_3 & \dots & \gamma_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \gamma_n & \dots & \gamma_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

alakra jutunk, amivel

$$(\gamma_2 - \gamma_1) \cdots (\gamma_n - \gamma_1) V(\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n)$$

egy eggyel kisebb rendű Vandermonde-determinánsra vezettük vissza. Ezt megismételve (vagy teljes indukcióval) adódik a tétel. ∎

1.3. Definíció (Permutáció). *Legyen X (rendszerint véges) halmaz. Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz permutációinak nevezzük. Ezek összeségét S_X jelöli. S_n az $(1, 2, \ldots, n)$ összes permutációinak a halmaza. Tehát az S_n elemszáma $n!$.*

A permutáció jelölése:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

azt jelenti, hogy $f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 3,\ f(4) = 1$. Az f függvény a felső sor minden elemét az alatta lévőbe képezi.

1.4. Definíció (Transzpozíció). *Legyen X halmaz és $x \neq y \in X$. Az x és y cseréje az az $f(x, y)$-nal elölt permutáció, amely az x-et y-ba, az y-t x-be viszi, az X többi elemét pedig fixen hagyja, azaz saját magába képezi. Az ilyen permutációkat cserének vagy transzpozíciónak hívjuk.*

1.6. Tétel. *Minden permutáció cserék (transzpozíciók) szorzata.*

Példa:

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

előállítása cserék szorzataként: $f = (3, 5)(1, 4)(1, 2)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

f többféleképpen is felírható cserék szorzataként:
$f = (1, 2)(2, 4)(3, 5) = (1, 5)(1, 4)(3, 5)(1, 2)(3, 4)$ is igaz.

1.5. Definíció (Inverzió). *Legyen $f \in S_n$ egy permtáció és $1 \leq i < i \leq n$. Ha $f(i) > f(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ezek inverzióban állnak. Ha $f(i) < f(j)$, akkor nem állnak inverzióban.*

Példa:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzió: $21, 43, 41, 53, 51, 31$. Nem inverzió: $24, 25, 23, 45$. Az inverziók száma tehát: 6.

1.6. Definíció (Permutáció előjele). *Az f permutáció páros, ha az inverziók száma páros. Ekkor az f előjele $+1$. Jelölés: $sg(f) = 1$. Az f permutáció páratlan, ha az inverziók száma páratlan. Ekkor az f előjele -1. Jelölés: $sg(f) = -1$. Vagyis ha az inverziók száma j, akkor $sg(f) = (-1)^j$.*

1.7. Tétel. *Ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben a páros és páratlan permutációk száma egyaránt $n!/2$.*

1.7. Definíció (Ciklus). *Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots, \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$ és X többi eleme a helyén (fixen) marad. Neve: ciklus, melynek hossza k. Diszjunkt ciklusok: nincs közös elemük.*

1.8. Tétel. *Ha X véges halmaz, akkor minden S_X-beli permutáció a sorrendtől eltekintve egyértelműen felírható páronként diszjunkt ciklusok szorzataként.*

1.1. Következmény. *Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. Egy permutáció pontosan akkor páratlan, ha ciklusfelbontásában a páros hosszú ciklusok száma páratlan.*

2. Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat a felső háromszög alakra hozás módszerével, azaz Gauss-eliminációval!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

2. Hány inverzió van az alábbi permutációkban?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

3. Hány inverzió lehet maximum egy 5 elemű halmaz egy páratlan permutációjában?

4. Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását és előjelét.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását és előjelét.

$$(1234)(35)(1432)(35); \quad (12345)(234)(12345)^{-1}; \quad [(12)(23)(34)]^{1222}.$$

Házi Feladat: Számítsuk ki az alábbi determinánst!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix};$$

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.web.elte.hu