Algebra és számelmélet gyakorlat
2023/2024 I. félév

2023. November 9.

1. Emlékeztető

1.1. Előadás (2023. október 26.)

Pitagoraszi számhármasok. Nagy Fermat-tétel. Kínai Maradéktétel
Irodalom: Elemi Számelmélet jegyzet 101-107 és 109-115 oldal.

1.1. Definíció (Pitagoraszi számhármasok). *A pitagoraszi számhármasok, amelyek olyan a, b és c pozitív egész számok, amelyre*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

1.1. Tétel. *Legyen a, b, c primitív pitagoraszi számhármas, azaz $\exists\ a, b, c \in \mathbb{Z}^+$*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

és

$$(a, b, c) = 1$$

Ekkor $u, v \in \mathbb{Z}^+,\ u > v,\ (u, v) = 1,\ u \not\equiv v \pmod 2$, hogy

$$a = u^2 - v^2,\ b = 2uv,\ c = u^2 + v^2,$$

Mivel minden pitagoraszi számhármas egy primitív pitagoraszi számhármas többszöröse, ezért általában az alábbi igaz:

1.2. Tétel. *Legyen* a, b, c *pitagoraszi számhármas. Ekkor* $\exists\ t, u, v \in \mathbb{Z}^+$, *melyekre* $u > v,\ (u, v) = 1,\ u \not\equiv v \pmod 2$ *és*

$$a = (u^2 - v^2)t,\ b = 2uvt,\ c = (u^2 + v^2)t,$$

vagy

$$a = 2uvt,\ b = (u^2 - v^2)t,\ c = (u^2 + v^2)t.$$

1.3. Tétel (Fermat-sejtés). *A* $x^n + y^n = z^n$ *egyenletnek* $n \geq 3$ *esetén nincs pozitív egész számokból álló megoldása.*

1.4. Tétel (Kínai maradéktétel). *Legyenek* $m_1, m_2, \ldots, m_k > 0$ *páronként relatív prímek,* $c_1, c_2, \ldots c_k$ *pedig tetszőleges egészek. Ekkor az*

$$\begin{array}{rcl} x & \equiv & c_1 \pmod{m_1} \\ x & \equiv & c_2 \pmod{m_2} \\ & \vdots & \\ x & \equiv & c_k \pmod{m_k} \end{array}$$

kongruencia-rendszer bármilyen $c_1, c_2, \ldots c_k$ *esetén megoldható, és a megoldás egyetlen maradékosztály* $\pmod M$, *ahol* $M = m_1 m_2 \cdots m_k$.

2. Feladatok

2.1. Pitagoraszi számhármasok, Fermat-sejtés

1. Adjunk meg olyan pitagoraszi számhármast, melynek egyik eleme 198. Létezik-e olyan primitív pitagoraszi számhármas, melynek egyik eleme 198?

2. Keressük meg az összes olyan primitív pitagoraszi számhármast, amelynek egyik eleme:

   a.) 56

   b.) 35

   c.) 42

3. Mely n természetes számokhoz található olyan primitív pitagoraszi számhármas, amelynek egyik eleme n?

2.2. Kongruencia rendszerek, kínai maradéktétel

1. Oldjuk meg a következő kongruencia-rendszert!

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 3 \pmod 7 \\ 3x &\equiv 7 \pmod 8 \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 4 \\ x &\equiv 1 \pmod 5 \end{aligned}$$

   kongruencia-rendszert a kínai maradéktétel segítségével!

3. Oldjuk meg a a következő kongruencia-rendszert a kínai maradéktétel segítségével!

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 2 \pmod 3 \\ 3x &\equiv 2 \pmod 7 \\ 9x &\equiv 7 \pmod{11} \end{aligned}$$

4. Oldjuk meg a a következő kongruencia-rendszert a kínai maradéktétel segítségével!

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 2 \pmod{5} \\ 2x &\equiv 2 \pmod{7} \\ 5x &\equiv 2 \pmod{11} \end{aligned}$$

5. Keressük meg a kínai maradéktétel alkalmazásával az alábbi kongruenciák szimultán megoldását:

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod{7} \\ 4x &\equiv 1 \pmod{9} \\ 8x &\equiv 1 \pmod{13} \end{aligned}$$

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.web.elte.hu