Algebra és számelmélet gyakorlat
(matematika BSc)
2024/2025 I. félév

2024. Október 21.

1. Emlékeztető

1.1. Tétel (Euler-Fermat tétel). *Ha $a \in \mathbb{Z}$ és $(a,m)=1$, akkor*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

1.1. Következmény. *Ha $a \in \mathbb{Z}$ és $(a,m)=1$, akkor tetszőleges $k,l \in \mathbb{Z}$ kitevők esetén*

$$k \equiv l \pmod{\varphi(m)} \Rightarrow a^k \equiv a^l \pmod{m}$$

1.2. Tétel (Kis Fermat-tétel). *Ha p prímszám, akkor*

- *$p \nmid a$ esetén $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$*
- *minden $a \in \mathbb{Z}$-re $a^p \equiv a \pmod{p}$*

2. Feladatok

1. Számítsuk ki $\varphi(n)$ értékét a következő behelyettesítési értékeken: $n = 1, 2, 3, \ldots, 12$
2. Bizonyítsuk be, hogy $n^{11} + 10n$ osztható 11-gyel, ha n tetszőleges egész szám!

3. Bizonyítsuk be, hogy ha n tetszőleges egész szám, akkor n^5 és n ugyanarra a számjegyre végződik!
4. Mennyit ad 20-al osztva maradékul 3423^{3423}?
5. Mennyit ad 11-gyel osztva maradékul 123^{765}?
6. Mennyit ad 44-gyel osztva maradékul 4447^{2018}?
7. Milyen maradékot ad 13-mal osztva 42^{600}?
8. Mi lesz $39^{39^{390}}$ szám utolsó két számjegye?
9. Határozzuk meg a 243^{402} utolsó három jegyét!
10. Mit ad 7-tel osztva maradékul $2^{102} + 3^{201}$?
11. Határozzuk meg 2^{1526} maradékát mod 17
12. Határozzuk meg 7777777^{654321} utolsó két számjegyét.
13. Határozzuk meg $931^{49^{82}}$ 46-tal vett (legkisebb) maradékát.
14. Bizonyítsuk be, hogy $n^7 - n$ osztható 42-vel, ha n tetszőleges egész szám!
15. Bizonyítsuk be, hogy ha az n egész szám nem osztható 17-tel, akkor $n^8 - 1$ vagy $n^8 + 1$ osztható 17-tel!
16. Egy szigeten 7- és 11-fejű sárkányok élnek. Egy királyfi le akarta győzni az összeset, ezért megszámolta, hány feje van a sárkányoknak összesen (hogy tudja, mire vállalkozik).

    (1) Hány sárkány van, ha 75 fejet számolt?
    (2) 59 fejet számolt. Igazoljuk, hogy elszámolta.
    (3) Most számolás előtt levágta az összes sárkánynak $1 - 1$ fejét és ezután 40 fejet számolt.

    Hány sárkány lehetett összesen?

Müllner Károly
Email: mullni@hotmail.com
https://mullni.web.elte.hu